

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» - در برهان خلف از هم‌ارزی: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow \sim q$ استفاده می‌کنیم بنابراین

برای اثبات «اگر a^2 مضرب ۷ باشد (p) / آن‌گاه a مضرب ۷ است (q). فرض می‌کنیم a مضرب ۷ نباشد ($\sim q$) / و نتیجه می‌گیریم a^2 مضرب ۷ نیست ($\sim p$).
(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (آسان)

۲- گزینه «۴» - در مورد گزینه «۱» مثال نقض به صورت $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ است که ضرب عدد گویا در گنگ عددی گویا شده است.

$$\text{گزینه «۲»}: 3^2 + 3^2 = 18$$

$$\text{گزینه «۳»}: 6^2 + 1 = 37$$

گزینه «۴»: وقتی $a^2 + b^2$ عددی فرد است به این معنی است که یکی از مقادیر a یا b فرد است و دیگری زوج بنابراین ضرب آن‌ها زوج خواهد بود.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۳- گزینه «۴» - درستی گزینه «۴» را با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم: فرض کنیم $a - b$ گنگ نباشد پس گویا است:

$$\begin{cases} a - b = \text{گویا} \\ a + b = \text{گویا} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = \text{گویا} \Rightarrow a = \text{گویا}$$

که با فرض در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است.

برای ارائه مثال نقض در مورد گزینه‌های دیگر می‌توانیم a و b را به صورت زیر قرار دهیم:

برای گزینه «۱» و «۳» با قرار دادن $a = 1 + \sqrt{2}$ و $b = 3 - \sqrt{2}$ مثال نقض ارائه می‌شود.

برای گزینه «۲» با قرار دادن $a = 3\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{2}$ حاصل $\frac{a}{b}$ عدد گویا خواهد بود.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۵- گزینه «۱» -

برای اثبات فرد بودن $a^2 + 9a + 7$ در ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{اگر } a \text{ زوج باشد } a = 2k \Rightarrow a^2 + 9a + 7 &= (2k)^2 + 9(2k) + 7 = 4k^2 + 18k + 7 \\ &= 4k^2 + 18k + 16 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 9k + 8}_q) + 1 = 2q + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اگر } a \text{ فرد باشد } a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 + 9a + 7 &= (2k + 1)^2 + 9(2k + 1) + 7 \\ &= 4k^2 + 22k + 27 = 4k^2 + 22k + 26 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 11k + 13}_{q'}) + 1 = 2q' + 1 \end{aligned}$$

برای ۲ حالت فوق هم‌ارزی زیر به کار گرفته می‌شود:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - مقادیر گزینه‌ها را به جای a قرار می‌دهیم:

$$a = 5 \Rightarrow a^2 + a + 17 = (5)^2 + 5 + 17 = 37 \text{ اول}$$

$$a = 7 \Rightarrow a^2 + a + 17 = (7)^2 + 7 + 17 = 57 \text{ اول}$$

$$a = 11 \Rightarrow a^2 + a + 17 = (11)^2 + 11 + 17 = 139 \text{ اول}$$

$$a = 16 \Rightarrow a^2 + a + 17 = (16)^2 + 16 + 17 = 273 = 16(16 + 1) + 17$$

$$\text{اول نیست } 17 \times 17 = 289 \neq 273$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (آسان)

۷- گزینه «۲» -

گزینه «۱»: نادرست است. چون میانگین حسابی دو عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آن‌هاست.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

گزینه «۲»: درست است.

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow a^2+1 \geq -2a \Leftrightarrow a^2+2a+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0$$

گزینه «۳»: نادرست است. مثال نقض: $p = 2$ و $q = 3$ در این صورت $p + q = 5$ عدد اول است.

گزینه «۴»: درست است. عدد 2^n را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.
(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2xy + y^2 + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+y)^2 + y^2 \geq 0$$

گزینه «۲»:

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y + \frac{x}{4})^2 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (y + \frac{x}{4})^2 + \frac{3x^2}{4} \geq 0$$

گزینه «۴»:

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + xy + \frac{y^2}{4}) + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{y}{4})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (دشوار)

۹- گزینه «۳» - بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: از این‌که $n + 2$ فرد است نتیجه می‌گیریم n فرد است. پس $n^2 + 1$ زوج نیست.

گزینه «۲»: از این‌که $n^2 + 1$ زوج است نتیجه می‌گیریم n^2 فرد است. پس n فرد است و $3n + 5$ فرد نیست.

گزینه «۴»: از این‌که $n + 4$ فرد است نتیجه می‌گیریم n فرد است. پس $5n^2$ نمی‌تواند زوج باشد. (یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» - با استفاده از برهان خلف برای اثبات مورد اول می‌توان گفت:

فرض کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد پس فرد است. بنابراین هر کدام از اجزای آن یعنی $(a_1 - b_1)$, $(a_2 - b_2)$, $(a_3 - b_3)$ فرد هستند. مجموع این ۳ عبارت را در نظر می‌گیریم که باید فرد باشد ولی:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_k - \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_k = 0$$

از آنجا که عدد فرد نیست با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل است.

در مورد $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ درست مانند مورد قبل اثبات می‌شود و در نهایت به حالت زیر می‌رسیم:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_k + \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_k = k + k = 2k$$

در موارد «۳» و «۴» دو مقدار یکسان هستند که با هم جمع می‌شوند و یک عدد زوج تولید می‌کنند. بنابراین حاصل همه موارد زوج است.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استدلال ریاضی) (متوسط)