

ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» - می‌دانیم نقطه M در وسط نقاط A و B واقع بوده و خواهیم داشت:

$$M \begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow r = \frac{1+\beta}{2} \Rightarrow 1+\beta=6 \Rightarrow \beta=5 \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2+2}{2} = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 7 \end{cases}$$

از طرفی قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $M(\alpha, \beta)$ برابر $A'(2\alpha - x, 2\beta - y)$ می‌باشد.

(کتاب درسی با تغییر) (فصل اول - هندسه مختصاتی - قرینه نقطه نسبت به یک نقطه) (آسان)

۲- گزینه «۲» - با توجه به رابطه فاصله بین دو نقطه خواهیم داشت:

$$AB = \sqrt{(3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

و چون $(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{2})^2$ می‌باشد، نوع مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود.

(کتاب همراه علوی) (فصل اول - هندسه مختصاتی - فاصله دو نقطه و طول پاره‌خط) (آسان)

۳- گزینه «۲» - فاصله نقطه A از دو خط داده شده، همان طول و عرض مستطیل است..

$$1) 2x - y - 7 = 0, A(8, 5) \Rightarrow AH = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$2) x + 2y - 6 = 0, A(8, 5) \Rightarrow AH' = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = AH \times AH' = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right) = \frac{48}{5} = \frac{96}{10} = 9.6$$

(سرآبری ۹۰) (هندسه مختصاتی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - ابتدا فاصله نقطه C از خط مماس بر دایره را به عنوان شعاع دایره بدست می‌آوریم:

$$CH = R = \frac{|2(2) - 4(-1)|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow s = \pi R^2 = 4\pi$$

(کتاب درسی) (فصل اول - هندسه مختصاتی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۵- گزینه «۱» - با ساده کردن معادله خط دوم به دو خط موازی برخورد می‌کنیم که داریم:

$$5x - 12y + 8 = 0, 5x - 12y - 5 = 0 \Rightarrow HH' = \frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{25+144}} = \frac{13}{13} = 1$$

با توجه به رابطه فاصله بین دو خط موازی:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \Rightarrow HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

(کتاب درسی) (فصل اول - هندسه مختصاتی - فاصله بین دو خط موازی) (آسان)

۶- گزینه «۳» - می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر یک ریشه k

برابر ریشه دیگر باشد یعنی $x' = kx$ ، رابطه $\frac{b}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ برقرار است که داریم:

$$(k=3)$$

$$\frac{a^2}{3 \times 4} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

و فاصله بین این دو مقدار a برابر ۱۶ واحد خواهد بود.

(سرآبری ۱۴۰۱) (فصل اول - معادله درجه دوم - روابط بین ریشه‌ها) (دشوار)

۷- گزینه «۲» - در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ اگر $b = a + c$ باشد

ریشه‌های معادله $x' = -1$ و $x'' = \frac{-c}{a}$ خواهند بود. در معادله فوق نیز

$$\frac{-c}{a} = -\tan^2 \alpha \text{ یا } -1 \text{ و ریشه‌ها عبارت اند از } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(حاتمی) (فصل اول - معادله درجه دوم - تعیین ریشه‌های معادله) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - با توجه به خط محور تقارن $x = 4$ در سهمی و ریشه $x_1 = 1$ ابتدا به ریشه

دیگر معادله سهمی یعنی $x_2 = -2$ می‌رسیم و در معادله سهمی داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 2)(x - 1)$$

هم‌چنین $a < 0$ و با داشتن مختصات نقطه $(1, 27)$ به مقدار a می‌رسیم:

$$C(1, 27) \in \text{سهمی} \Rightarrow 27 = a(3)(-9) \Rightarrow a = -1 < 0$$

بنابراین در معادله به دست آمده سهمی $y = -(x+2)(x-1)$ با جایگزینی $x = 0$ به

مقدار عرض از مبدا نمودار یعنی $y_0 = 2$ خواهیم رسید.

(حاتمی) (فصل اول - تابع درجه دوم - نمودار تابع سهمی) (متوسط)

۹- گزینه «۲» - می‌دانیم با برابر صفر قرار گرفتن عبارت مربع کامل به کمترین مقدار

تابع $f(x)$ می‌رسیم، البته با توجه به مثبت بودن عبارت مربع کامل مینیمم تابع بدست می‌آید که برابر $y = 5$ می‌باشد.

(حاتمی) (فصل اول - معادله درجه دوم - مینیمم تابع درجه دوم) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» - می‌بایستی در $x = 2$ دارای ریشه مضاعف باشد که داریم:

$$y = 3(x-2)^2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 3(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow y = 3x^2 - 12x + 12$$

و با مقایسه تابع داده شده به مقادیر $a = -12$ و $b = 12$ و $a + b = 0$ می‌رسیم.

(حاتمی) (فصل اول - تابع درجه دوم - تعداد ریشه‌ها و صفرها) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» - می‌دانیم در صورتی که معادله درجه چهارم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ و $a \neq 0$

دارای ریشه‌های حقیقی باشد، مجموع این ریشه‌ها همواره برابر صفر خواهد بود.

(حاتمی) (فصل اول - معادله درجه دوم - معادله دو مجذوری) (آسان)

۱۲- گزینه «۲» - می‌بایستی فاصله بین دو ریشه معادله برابر ۲ واحد باشد که داریم:

$$|x_1 - x_2| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow \Delta = 16$$

$$\Delta = 4 - 8k = 16 \Rightarrow -8k = 12 \Rightarrow k = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

(کتاب همگام علوی) (فصل اول - معادله درجه دوم - روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

با توجه به شرط $X' = X''$ و ضرب کردن طرفین رابطه اخیر در $X'' \neq 0$ خواهیم داشت:

$$X'X'' = X''^2 \Rightarrow \frac{C}{a} = X''^2 \Rightarrow 125 = X''^2 = 5^3 \Rightarrow X'' = 5$$

از طرفی می‌دانیم ریشه معادله در آن صدق نموده و به مقدار m می‌رسیم که داریم:

$$X'' = 5 \Rightarrow X'^2 + mx + 125 = 0 \Rightarrow 25 + 5m + 125 = 0 \Rightarrow 5m = -150 \Rightarrow m = -30$$

(حانمی) (فصل اول - معادله درجه دوم - روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - می‌بایستی $S > 0$ و $P > 0$ و $\Delta > 0$ باشد که داریم:

$$S = \frac{-b}{a} = 2 > 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(m-3) > 0 \xrightarrow{+8} 2 - (m-3) > 0$$

$$2 - m + 3 > 0 \Rightarrow -m > -5 \Rightarrow m < 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 3 < m < 5$$

و در این بازه فقط $m = 4$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی وجود خواهد داشت.

(حانمی) (فصل اول - معادله درجه دوم - تعداد و علامت ریشه‌ها) (دشوار)

۱۵- گزینه «۳» - در نسبت $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ و انتخاب $y = 1$ به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم

که ریشه مثبت x ، همان طول نسبت طلایی خواهد بود:

$$x = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 1, P = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{1}{-1} = -1$$

(کتاب درسی) (فصل اول - معادلات گویا - مستطیل طلایی) (آسان)

۱۶- گزینه «۲» - با ضرب طرفین معادله در عبارت $(x-1)(3x)$ داریم:

$$(6x)(3x) + (x-1)^2 = 3(3x)(x-1)$$

$$\Rightarrow 18x^2 + x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x \Rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(5x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{5}$$

که ریشه $x = \frac{-1}{2}$ کوچکتر است.

(کتاب همگام علوی) (فصل اول - معادلات گویا - حل معادله) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» -

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2a^2 + 4a = 9a^2 - 12a + 4 \Rightarrow$$

$$7a^2 - 16a + 4 = 0 \xrightarrow{\text{روش ac}} a^2 - 16a + 28 = 0 \Rightarrow (a-14)(a-2) = 0 \Rightarrow$$

$$a = 2 \text{ یا } a = 14$$

جواب‌های معادله با تقسیم بر عدد ۷ به صورت $\frac{2}{7}$ یا $\frac{2}{7}$ می‌باشد که فقط $\frac{2}{7}$ قابل قبول است.

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{4}{5}$$

(سراسری ۹۸) (فصل اول - معادله گنگ - حل معادله گنگ) (دشوار)

۱۸- گزینه «۱» - محیط سه ضلع برابر $x + 2y = 48$ و می‌بایستی مساحت $S = xy$ ماکزیمم

باشد که داریم:



$$x = 48 - 2y \Rightarrow S = xy = (48 - 2y)y = -2y^2 + 48y$$

حال می‌بایستی ماکزیمم مقدار تابع درجه دوم فوق را بدست آوریم:

$$y = -2[y^2 - 24y] = -2[(y-12)^2 - 144] = -2(y-12)^2 + 288$$

با مساوی صفر قرار گرفتن مربع کامل به $S = 288$ ماکزیمم مقدار مساحت می‌رسیم.

(سراسری ۷۷) (فصل اول - معادله درجه دوم - کاربرد نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع درجه دوم) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» - می‌بایستی معادله گنگ با توجه به $A(x, 0)$ و $P(2, 3)$ را حل کنیم که داریم:

$$AP = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-3)^2} = 5$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + 9} = 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-2)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$$

$$\begin{cases} x-2=4 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6, 0) \\ x-2=-4 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

(کتاب درسی) (فصل اول - معادله گنگ - حل معادله گنگ) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» - چون $x \geq 1$ و $x \leq 7$ در طرف اول معادله گنگ به محدوده $1 \leq x \leq 7$ برای

دامنه تعریف می‌رسد و از طرفی جمع دو مقدار مثبت است می‌بایستی در طرف دوم

شرط $0 \leq x-1$ یا $x \geq 1$ برقرار باشد که در محدوده دامنه $1 \leq x \leq 7$ اشتراک نداشته

و معادله گنگ فاقد جواب است.

(حانمی) (فصل اول - معادله گنگ - حل معادله گنگ) (متوسط)