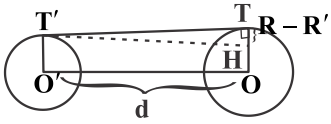
ریاضی ۲

۱- گزینه «۲» ـ فاصله دو نقطه O و O' را d می‌نامیم. طول d.



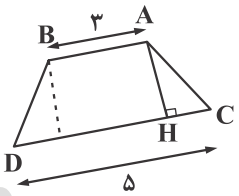
$$d = \sqrt{(۲+۳)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۲۹}$$

$T'H = d$ و مثلث $TT'H$ قائم‌الزاویه است. پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۲۹-(۳-۱)^۲} = \sqrt{۲۹-۴} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم)

۲- گزینه «۴» ـ طول ارتفاع این ذوزنقه برابر است با فاصله دو خط از هم:



$$\begin{cases} ۲x-y=-۱ \\ -۴x+۲y=-۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y+۱=۰ \\ ۲x-y-۴=۰ \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{|۴+۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

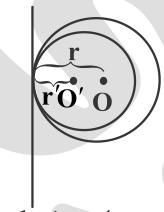
باتوجه به این‌که $CH = \frac{۵-۳}{۲} = ۱$، می‌توان به کمک قضیه فیثاغورس طول ساق را به‌دست آورد:

$$AC = \sqrt{(\sqrt{۵})^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۶} \Rightarrow \text{مجموع دو ساق} = ۲\sqrt{۶}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو خط موازی)

۳- گزینه «۱» ـ ابتدا وضعیت دو دایره را نسبت به هم بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا فاصله مراکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم: $OO' = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (۳+۱)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$

حال باتوجه به این‌که تفاضل شعاع دایره‌ها با فاصله مراکز آن‌ها از هم برابر است، نتیجه می‌شود دو دایره از داخل بر هم مماس هستند. در چنین حالتی فقط می‌توان یک خط رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد.

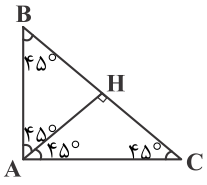


مماس مشترک

$OO' = r - r'$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم)

۴- گزینه «۳» ـ نکته: ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه متساوی‌الساقین نصف وتر است. برای به‌دست آوردن ارتفاع مثلث، فاصله نقطه A از خط داده شده را می‌یابیم. سپس آن را دو برابر می‌کنیم تا طول قاعده به‌دست آید:

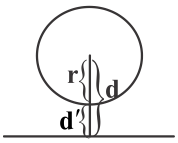


$$AH = \frac{|۴+۸+۵|}{\sqrt{۱^۲+۴^۲}} = \frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}} = \sqrt{۱۷} \Rightarrow BC = ۲AH = ۲\sqrt{۱۷}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۷} \times ۲\sqrt{۱۷} = ۱۷$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه از خط)

۵- گزینه «۳» ـ کوتاه‌ترین فاصله خط با نقطه روی دایره را با d' و فاصله مرکز دایره تا خط را با d نشان می‌دهیم. ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط $y = ۲x - ۵$ را به‌دست می‌آوریم:

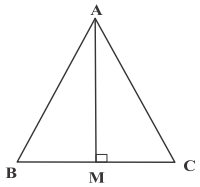


$$d = \frac{|۲-۲+۱۵|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵}$$

$$r = d - d' = ۲\sqrt{۵}$$

بنابراین شعاع دایره می‌تواند دو برابر $\sqrt{۵}$ باشد. (جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه از خط)

۶- گزینه «۲» ـ نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده، برهم منطبق هستند.



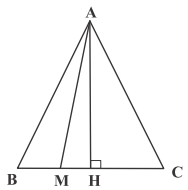
$$M = \left(\frac{۱+۳}{۲}, \frac{۲-۲}{۲}\right) = (۲, ۰)$$

شیب خط BC را پیدا می‌کنیم: $m_{BC} = \frac{۲+۲}{۱-۳} = \frac{۴}{-۲} = -۲$

چون AM بر BC عمود است، $m_{AM} = \frac{۱}{۲}$. پس معادله خط ارتفاع برابر است با: $y = \frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow ۲y = x-۲ \Rightarrow ۲y - x + ۲ = ۰$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ نقطه وسط پاره‌خط)

۷- گزینه «۱» ـ نقطه B روی محور y هاست، پس $x_B = ۰$.



$$\xrightarrow{M \text{ میانه‌ی } BC \text{ است.}} \begin{cases} \frac{x_B + x_C}{۲} = ۲ \Rightarrow x_B + x_C = ۴ \xrightarrow{x_B = ۰} x_C = ۴ \\ \frac{y_B + y_C}{۲} = ۳ \Rightarrow y_B + y_C = ۶ \quad (۱) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{AH}=\frac{۵-۲}{۱-۰}=۳ \xrightarrow{\text{AH بر BC عمود است.}} m_{BC}=-\frac{۱}{۳} \\ m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{y_C-y_B}{۴-۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_C-y_B}{۴}=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow y_C-y_B=-\frac{۴}{۳} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} y_B+y_C=۶ \\ y_C-y_B=-\frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow y_C=\frac{۷}{۳}, y_B=\frac{۱۱}{۳} \Rightarrow ۳B-C=(۰,۱۱)-(۴,\frac{۷}{۳})=(-۴,\frac{۲۶}{۳})$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ نقطه وسط پاره‌خط)

۸- گزینه «۲» ـ قطر دایره و مربع با هم برابر هستند. می‌دانیم قطر هر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلعش است.

بنابراین: $۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}AB \Rightarrow AB=۲$. از نقطه O بر AB عمود می‌کنیم.

OH نصف طول ضلع مربع است. یعنی فاصله نقطه O از خط AB برابر ۱ است.

در بین گزینه‌ها فقط گزینه «۲» چنین ویژگی را دارد:

گزینه «۲»: $۴y-۳x-۲=۰ \Rightarrow OH=\frac{|۴\times۰-۳\times۱-۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه تا خط)

۹- گزینه «۳» ـ می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، فاصله هر دو رأس مقابل از قطر بین آن‌ها برابر است. بنابراین: $CH=\sqrt{۵}$ (۱)

از طرف دیگر:

$$CH=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳-y)^۲}=\sqrt{۱+(۳-y)^۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۱+(۳-y)^۲=۵ \Rightarrow \begin{cases} ۳-y=۲ \Rightarrow y=۱ \\ ۳-y=-۲ \Rightarrow y=۵ \end{cases}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$AB=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۵}, BC=\sqrt{(۴-۳)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۵}, CD=\sqrt{(۱-۳)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

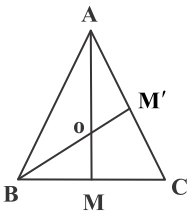
$$AD=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

طول اضلاع چهار ضلعی با هم برابر است. پس چهارضلعی مربع یا لوزی است.

$$m_{AB}=\frac{-۲+۱}{۴-۲}=-\frac{۱}{۲}, m_{BC}=\frac{۰+۲}{۳-۴}=-۲$$

از آن‌جا که دو ضلع مجاور برهم عمود نیستند، پس لوزی است. (جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم)

۱۱- گزینه «۱» ـ روش اول: نقطه M را وسط BC و M' را وسط AC قرار می‌دهیم.



$$M(\frac{۳-۵}{۲},\frac{۱-۱}{۲})=(-۱,۰)$$

$$m_{AM}=\frac{۳-۰}{۱+۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}(x+۱) \quad AM \text{ معادله خط } (۱)$$

$$M'(\frac{۱-۵}{۲},\frac{۳-۱}{۲})=(-۲,۱), m_{BM'}=\frac{۱-۱}{۳+۲}=۰ \Rightarrow y=۱ \quad BM' \text{ معادله خط } (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} y=۱ \\ y=\frac{۳}{۲}(x+۱) \end{cases} \Rightarrow ۱=\frac{۳}{۲}(x+۱) \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $O(-\frac{۱}{۳},۱)$ محل برخورد میانه‌هاست. حال طول AO برابر است با:

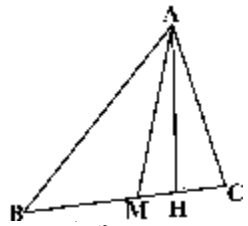
$$AO=\sqrt{(۱+\frac{۱}{۳})^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۱۶}{۹}+۴}=\frac{\sqrt{۵۲}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۳}$$

روش دوم: نکته: فاصله نقطه برخورد میانه‌ها از هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ طول میانه نظیر آن رأس است.

$$AM=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۳} \xrightarrow{OA=\frac{۲}{۳}AM} OA=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۳}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ نقطه وسط پاره خط و فاصله دو نقطه از هم)

۱۲- گزینه «۲» ـ



$$M=(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۰-۴}{۲})=(۱,-۲)$$

$$AM=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۴+۲)^۲}=۶$$

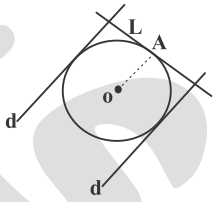
$$m_{BC}=\frac{۰+۴}{۳+۱}=۱ \Rightarrow y=x-۳ \ BC \text{ خط } \text{ معادله } \Rightarrow AH=\frac{|۴-۱+۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{قضیه فیثاغورس}]{\Delta AMH} MH=\sqrt{۶^۲-(۳\sqrt{۲})^۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$BM=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۲+۴)^۲}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow |MB-MH|=۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ نقطه وسط پاره خط، فاصله تا خط و فاصله دو نقطه از هم)

۱۳- گزینه «۳» ـ خط مماس مورد نظر، بر L عمود است. پس با OA موازی است.



$$m_{OA}=\frac{۵-۳}{-۲+۱}=-۲ \xrightarrow{d \text{ با } OA \text{ موازی است.}} m_d=-۲ \Rightarrow y=-۲x+n \quad d \text{ معادله خط}$$

از طرفی شعاع دایره برابر است با:

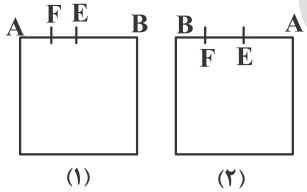
$$OA=\sqrt{(-۱+۲)^۲+(۳-۵)^۲}=\sqrt{۵}$$

در نتیجه فاصله نقطه O از خط d نیز $\sqrt{۵}$ است:

$$\frac{|۵+۲\times(-۲)-n|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\sqrt{۵} \Rightarrow ۱-n=\pm ۵ \Rightarrow n=-۴, n=۶ \Rightarrow \begin{cases} y+۲x-۶=۰ \\ y+۲x+۴=۰ \end{cases}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم ـ فاصله نقطه از خط)

۱۴- گزینه «۴» ـ دو حالت زیر را داریم:



$$EF=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۰+۴)^۲}=۵$$

$$BE=\frac{۱}{۲}AF=۶ \Rightarrow BE=۶, AF=۱۲$$

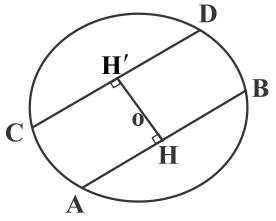
$$\xrightarrow{\text{شکل (۱)}} AB=AF+EF+BE=۱۲+۵+۶=۲۳ \Rightarrow S_{ABCD}=۲۳^۲=۵۲۹$$

$$\xrightarrow{\text{شکل (۲)}} \begin{cases} BE=BF+EF \Rightarrow ۶=BF+۵ \Rightarrow BF=۱ \\ AF=AE+EF \Rightarrow ۱۲=AE+۵ \Rightarrow AE=۷ \end{cases} \Rightarrow AB=AE+EF+BF=۷+۵+۱=۱۳$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=۱۳^۲=۱۶۹$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم)

۱۵- گزینه «۲» ـ می‌دانیم از دو وتر دایره هر کدام به مرکز نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است.



$$OH=\frac{|-۴-۳-۱|}{\sqrt{۴^۲+۱^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۷}}$$

$$OH'=\frac{|-۲+۹+۱|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow OH<OH' \Rightarrow AB>CD$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه تا خط)

۱۶- گزینه «۳» ـ خط $bx-ay+۲=۰$ بر دو خط دیگر عمود است. بنابراین آن دو خط باهم موازی‌اند.

$$-۴x+by-۳=۰ \Rightarrow m_۱=\frac{۴}{b}$$

$$-bx+۴y-۵=۰ \Rightarrow m_۲=\frac{b}{۴}$$

$$\xrightarrow{m_۱=m_۲} \frac{۴}{b}=\frac{b}{۴} \Rightarrow b=\pm ۴ \Rightarrow m_۱=m_۲=(۱) \text{ یا } m_۱=m_۲=-۱ \ (۲)$$

$$bx-ay+۲=۰ \Rightarrow m_۳=\frac{b}{a}$$

$$\xrightarrow{m_۳=-\frac{۱}{m_۱}=-۱} \frac{b}{a}=-۱ \xrightarrow{b=+۴} \frac{۴}{a}=-۱ \Rightarrow a=-۴ \Rightarrow ۲a+b=-۸+۴=-۴$$

$$\xrightarrow{m_۳=-\frac{۱}{m_۱}=۱} \frac{b}{a}=۱ \xrightarrow{b=-۴} \frac{-۴}{a}=۱ \Rightarrow a=-۴ \Rightarrow ۲a+b=-۸-۴=-۱۲$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ خطوط موازی و عمود)

۱۷- گزینه «۴» ـ نکته: مجموعه نقاطی که از دو خط موازی $ax+by=c_1$ و $ax+by=c_2$ به یک فاصله هستند، روی خط $ax+by=\frac{c_1+c_2}{2}$ قرار دارد. خطوط $4y-3x=-2$ و $4y-3x=8$ موازی‌اند. بنابراین مجموعه نقاطی که از این دو خط به یک فاصله‌اند، روی خط $4y-3x=\frac{8-2}{2} \Rightarrow 4y-3x=3$ قرار دارد. هم‌چنین فاصله دو خط موازی که همان قطر دایره است، برابر است با: $\frac{|8-(-2)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$

پس شعاع دایره ۱ است. فرض می‌کنیم نقطه مورد نظر ما (x_0 , y_0) باشد. این نقطه باید روی خط $4y-3x=3$ و روی دایره باشد. بنابراین فاصله (x_0 , y_0) تا مرکز دایره ۱ است:

$$\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=1 \Rightarrow (x_0+1)^2+y_0^2=1 \quad (1)$$

هم‌چنین نقطه (x_0 , y_0) در معادله خط $4y-3x=3$ صدق می‌کند. یعنی $4y_0-3x_0=3$ (۲)

$$\xrightarrow{(1),(2)} (x_0+1)^2+(\frac{3+3x_0}{4})^2=1 \Rightarrow 25x_0^2+50x_0+9=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0=-1/8 \\ x_0=-0/2 \end{cases}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه از هم و فاصله نقطه از خط)

۱۸- گزینه «۱» ـ شیب خط AC برابر ۱ است. بنابراین معادله خط AC برابر است با:

$$y-3=1(x-3) \Rightarrow y=x$$

قطر AC بر BD عمود است. بنابراین $m_{BD}=-1$ و معادله خط BD برابر است با:

$$y+3=-1(x-2) \Rightarrow y+x+1=0$$

مرکز لوزی، محل برخورد دو خط را پیدا می‌کنیم:

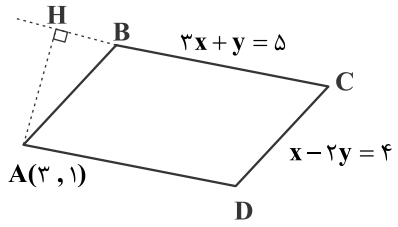
$$\begin{cases} y=x \\ y+x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow O=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

D قرینه نقطه B و C قرینه نقطه A نسبت به O است.

$$C=2O-A=2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-(3,3)=(-4,-4)$$
$$D=2O-B=2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-(2,-3)=(-3,2)$$
$$\Rightarrow C+D=(-7,-2)$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ خط عمود و قرینه نقطه)

۱۹- گزینه «۳» ـ باتوجه به این‌که دو خط موازی نیستند، دو ضلع مجاورند و چون نقطه (۱ , ۳) در هیچ یک از دو معادله داده شده صدق نمی‌کند، پس در رأس مقابل قرار دارد. ابتدا فاصله نقطه A تا خط $3x+y=5$ را به‌دست می‌آوریم:



$$AH=\frac{|9+1-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

سپس باتوجه به موازی بودن BC و AD و این‌که شیب خط BC، ۳-است. معادله خط AD را می‌نویسیم:

$$y-1=-3(x-3) \Rightarrow y=-3x+10$$

حال نقطه D که محل برخورد دو خط CD و AD است را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=-3x+10 \\ x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{24}{7}, y=-\frac{2}{7} \Rightarrow D(\frac{24}{7},-\frac{2}{7}) \Rightarrow AD=\sqrt{(3-\frac{24}{7})^2+(1+\frac{2}{7})^2}=\frac{\sqrt{90}}{7}=\frac{3\sqrt{10}}{7}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=AH\times AD=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{7}=\frac{15}{7}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه از خط ـ فاصله دو نقطه از هم)

۲۰- گزینه «۳» ـ فاصله نقطه (a , b) از خط $x+y=1$ برابر $\sqrt{2}$ است. بنابراین:

$$\frac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Rightarrow |a+b-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \Rightarrow a=3-b \quad (1) \\ a+b=-1 \Rightarrow a=-b-1 \quad (2) \end{cases}$$

هم‌چنین فاصله نقطه (a , b) از نقطه $(0 , -1)$ برابر $\sqrt{3}$ است. بنابراین:

$$\sqrt{(a+1)^2+(b-0)^2}=\sqrt{3} \Rightarrow (a+1)^2+b^2=3 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری (1) در (3)}} (4-b)^2+b^2=3 \Rightarrow 2b^2-8b+13=0 \Rightarrow \Delta<0 \text{ غ ق ق}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری (2) در (3)}} (-b)^2+b^2=3 \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}-1$$

$$(-\sqrt{\frac{3}{2}}-1,\sqrt{\frac{3}{2}}),(\sqrt{\frac{3}{2}}-1,-\sqrt{\frac{3}{2}})$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه از خط ـ فاصله دو نقطه از هم)