ریاضی ۲

۱- گزینه «۲» ـ شرط قائم بودن در رأس B:

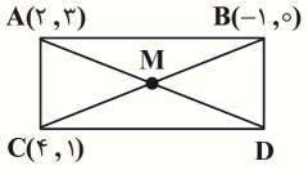
$$m_{AB} \times m_{BC} = -1$$

$$m_{AB} = \frac{m-4}{2m-5} \qquad m_{BC} = -m$$

$$\frac{m-4}{2m-5} \times -m = -1 \qquad m^2 - 4m = 2m - 5 \qquad m^2 - 6m + 5 = 0 \qquad m = 1, 5$$

چون رأس A در ناحیه اول مختصات هست بنابراین $m = 1$ قابل قبول است. (اله‌دادی) (درس اول ـ رابطه شیب دو خط عمود ـ صفحه ۳)

۲- گزینه «۴» ـ اقطار مستطیل منصف یکدیگرند بنابراین باتوجه به شکل داریم:



$$x_m = \frac{3}{2}, y_m = \frac{1}{2}$$

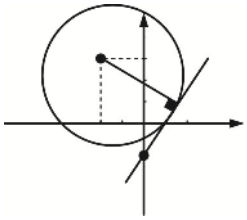
$$\frac{3}{2} = \frac{x_D + 2}{2} \quad \boxed{x_D = 1} \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{3 + y_D}{2} \quad \boxed{y_D = -2}$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB)

۳- گزینه «۳» ـ چون خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، درواقع شعاع دایره فاصله بین خط مماس و مرکز دایره است.

$$\text{شعاع دایره} = \frac{|(3 \times -2) - 3 - 1|}{\sqrt{(3)^2 + (1)^2}} = \sqrt{10}$$

باتوجه به شکل چون نقطه درون دایره است، کمینه فاصله برابر فاصله نقطه و مرکز ـ شعاع است و بیشینه فاصله برابر فاصله نقطه و مرکز + شعاع است.



$$\text{کمینه فاصله} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

$$\text{بیشینه فاصله} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ فاصله نقطه از خط ـ صفحه ۸)

۴- گزینه «۳» ـ

$$1 = \frac{a+c}{2} \quad a + c = 2 \qquad 5 = \frac{b+d}{2} \quad b + d = 10$$

$$d = \frac{m - 1 + m + 5}{2} \Rightarrow d = m + 2 \qquad c = \frac{m + 2 + m - 6}{2} = m - 2$$

$$b + d - a - c = 8 \Rightarrow b + \cancel{m} + 2 - a - \cancel{m} + 2 = 8 \Rightarrow b - a = 4$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر و مختصات وسط پاره‌خط ـ صفحه ۷)

۵- گزینه «۲» ـ باتوجه به معادلات دو خط $y + x + 2 = 0$, $y - x + 6 = 0$ این دو خط بر یکدیگر عمودند. دو خط را با یکدیگر قطع داده تا مختصات رأس قائمه به‌دست آید $(4-, 2)$ = رأس قائمه : B مختصات رئوس دیگر را به‌دست می‌آوریم.

$$A(-2, 0), C(8, 2)$$

$$S = \frac{1}{2} |AB \times BC| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ فاصله دو نقطه از یکدیگر ـ صفحات ۵ و ۳)

۶- گزینه «۳» ـ یک نقطه به مختصات (x, y) در نظر می‌گیریم و در فرمول فاصله نقطه از خط قرار می‌دهیم.

$$\frac{|3x - 4y - 5|}{5} = 1 \qquad 5 = |3x - 4y - 5|$$

$$3x - 4y - 5 = 5 \qquad 3x - 4y - 10 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x - 4y - 5 = -5 \qquad 3x - 4y = 0$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ فاصله نقطه از خط ـ صفحات ۹ و ۸)

۷- گزینه «۳» ـ

$$\sqrt{(5-1)^2 + (7-a)^2} = 5$$

$$16 + (7-a)^2 = 25 \qquad 9 = (7-a)^2 \qquad 7 - a = 3 \qquad 7 - a = -3$$

$$a = 4 \qquad a = 10$$

مجموع مقادیر:

$$10 + 4 = 14$$

(اله‌دادی) (درس اول ـ فاصله دو نقطه از یکدیگر ـ صفحه ۵)

۸- گزینه «۲» ـ معادله خط سه ضلع مثلث را می‌نویسیم و سپس طول تمامی ارتفاع‌ها را محاسبه می‌کنیم از آنجا مشخص می‌شود که ارتفاع خارج شده از رأس (۳ , ۴) کوتاه‌ترین ارتفاع است.

شیب ارتفاع $= ۱$ شیب ضلع $= -۱$

$y = mx + h , m = ۱ \Rightarrow y = x + h \Rightarrow ۳ = ۴ + h \Rightarrow h = -۱$

$y = x - ۱ \Rightarrow y - x + ۱ = ۰$

(اللهدادی) (درس اول ـ رابطه شیب دو خط عمود و نوشتن معادله خط ـ صفحه ۳)

۹- گزینه «۲» ـ رأس حاصل از برخورد دو ضلع:

$x + ۳ = \frac{-x}{۶} + \frac{۱۱}{۶} \Rightarrow \frac{۷}{۶}x = \frac{-۷}{۶} \quad x = -۱ \quad y = ۴$

نصف طول قطر $= \sqrt{(\frac{۷}{۲}+۱)^۲ + (۳-۴)^۲} = \sqrt{۱ + \frac{۸۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۸۵}}{۲}$

طول قطر $= \sqrt{۸۵}$

(اللهدادی) (درس اول ـ مختصات وسط پاره‌خط و فاصله دو نقطه از یکدیگر ـ صفحه ۵)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$AB = \sqrt{(۱۶+۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴۱۶} \quad , \quad AC = \sqrt{(۴+۴)^۲ + (-۸-۰)^۲} = \sqrt{۱۲۸} \quad , \quad BC = \sqrt{(۱۶-۴)^۲ + (۴+۸)^۲} = \sqrt{۲۸۸}$

$\Rightarrow BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه

(اللهدادی) (درس اول ـ فاصله دو نقطه ـ صفحه ۵)

۱۱- گزینه «۳» ـ

معادله خط $\Rightarrow y = mx + h \Rightarrow ۱ = -m + h \Rightarrow h = ۱ + m \Rightarrow y = mx + ۱ + m \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \Rightarrow x = \frac{-(۱+m)}{m} \\ x = ۰ \Rightarrow y = (۱+m) \end{cases}$

$S = \frac{۱}{۲}|\frac{-(۱+m)}{m} \times (۱+m)| \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \frac{(۱+m)^۲}{|m|} \Rightarrow ۱۶|m| = m^۲ + ۲m + ۱$

اگر $m > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۱۴m + ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{۱۴ \pm \sqrt{(۱۴)^۲ - ۴}}{۲} = \frac{۱۴ \pm \sqrt{۱۹۲}}{۲}$ قابل قبول (I)

اگر $m < ۰ \Rightarrow m^۲ + ۱۸m + ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{-۱۸ \pm \sqrt{(۱۸)^۲ - ۴}}{۲} = \frac{-۱۸ \pm \sqrt{۳۲۰}}{۲}$ قابل قبول (II)

$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{-۱۸+\sqrt{۳۲۰}}{۲} + \frac{-۱۸-\sqrt{۳۲۰}}{۲} + \frac{۱۴+\sqrt{۱۹۲}}{۲} + \frac{۱۴-\sqrt{۱۹۲}}{۲} = -۴$

(اللهدادی) (درس اول ـ نوشتن معادله خط ـ صفحه ۳)

۱۲- گزینه «۱» ـ

نسبت دو فاصله $= \frac{۵}{\sqrt{۲}}$ فاصله نقطه از خط $= \frac{|۲-۰|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$ فاصله دو نقطه $= \sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲} = ۵$

(اللهدادی) (درس اول ـ صفحات ۵ و ۸)

۱۳- گزینه «۲» ـ دو نقطه در معادله قطر صدق می‌کنند بنابراین دو سر قطر هستند و طبق قضیه فیثاغورس درمی‌یابیم که در مربع طول قطر $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع است.

طول قطر $= \sqrt{(-۳-۰)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۱۳}$

$\sqrt{۱۳} = \sqrt{۲}a \quad a = \sqrt{\frac{۱۳}{۲}}$ محیط $= ۴ \times \frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲۶}$

(اللهدادی) (درس اول ـ معادله خط و نکات تکمیلی ـ صفحه ۵)

۱۴- گزینه «۴» ـ هر نقطه بر خط $x - y + ۳ = ۰$ دارای مختصات $(x , x + ۳)$ است.

حال داریم:

فاصله نقطه از خط $= \frac{|x+y|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \quad ۲ = |۲x + ۳|$

$۲x + ۳ = ۲ \quad x = \frac{-۱}{۲} \quad ۲x + ۳ = -۲ \quad x = \frac{-۵}{۲} \qquad y = \frac{۵}{۲} \quad y = \frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۲} = ۳$

(اللهدادی) (درس اول ـ صفحه ۸)

۱۵- گزینه «۱» ـ دو خط باید موازی باشند تا تمام نقاط در یک فاصله باشند:

$$۳x+۵=(a-۱)y$$

$$y=\frac{۳x+۵}{a-۱}\ ,\ y=\frac{(a+۱)x+۲۰}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{a-۱}=\frac{a+۱}{۸} \Rightarrow ۲۴=a^۲-۱ \Rightarrow a^۲=۲۵ \Rightarrow a=\pm ۵$$

اگر $a=۵ \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۴y+۵=۰ \\ ۸y-۶x-۲۰=۰ \end{cases} \Rightarrow ۳x-۴y+۱۰=۰$

یک نقطه از خط اول می‌گیریم: $(۱\ ,\ ۲)$

اگر $a=-۵ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۶y+۵=۰ \\ ۸y+۴x-۲۰=۰ \end{cases}$

فاصله دو خط $=\frac{|۳-۸+۱۰|}{۵}=۱$

یک نقطه از خط دوم می‌گیریم $(۵\ ,\ ۰)$

فاصله دو خط $=\frac{|۳\times ۵+۵|}{\sqrt{۹+۳۶}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۴\times ۵}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۳}$ غ . ق. ق

(الله‌دادی) (درس اول ـ فاصله دو خط موازی ـ صفحه ۹)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$\frac{۱+x_A}{۲}=-۲ \quad x_A=-۵ \qquad \frac{۲+y_A}{۲}=۴ \quad y_A=۶ \quad A(-۵\ ,\ ۶)$$

(الله‌دادی) (درس اول ـ قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر ـ صفحه ۷)

۱۷- گزینه «۲» ـ نقطه $A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha-۱\end{matrix}\right.$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر گرفته و فاصله آن را از خط $۲x-۳y=۵$ به‌دست آورده و مساوی $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha-۱\end{matrix}\right. \\ ۲x-۳y-۵=۰ \end{cases} \Rightarrow AH=\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{|-\alpha-۲|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

$$|-\alpha-۲|=۱۳ \Rightarrow -\alpha-۲=۱۳ \Rightarrow \alpha=-۱۵$$

$$-\alpha-۲=-۱۳ \Rightarrow \alpha=۱۱$$

(سراسری تجربی ۸۹) (درس اول ـ فاصله دو خط و نقطه از خط ـ صفحات ۵ و ۸)

۱۸- گزینه «۳» ـ مختصات نقطه A در هیچ یک از معادلات صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون دو خط موازی نیستند کافیست با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B بدست آید.

$$\begin{matrix} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{matrix} \Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴ \Rightarrow (-۱\ ,\ ۴)$$

می‌دانیم M وسط پاره‌خط AB قرار دارد، یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳ \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

(سراسری تجربی ۹۰) (درس اول ـ مختصات نقطه وسط پاره‌خط ـ صفحه ۷)

۱۹- گزینه «۴» ـ فاصله وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.

$$A\left|\begin{matrix}۳ \\ -۱\end{matrix}\right. \quad x-۲y+۵=۰ \quad AH=\text{نصف ضلع مربع}=\frac{|۳+۲+۵|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{ضلع مربع}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \qquad \text{مساحت مربع}=(\text{طول ضلع})^۲=۸۰$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ۹۳) (درس اول ـ فاصله نقطه از خط)

۲۰- گزینه «۲» ـ شیب خط مورد نظر را m گرفته و معادله خطی را که از $\left|\begin{matrix}۱ \\ ۲\end{matrix}\right.$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$y=mx+h \quad ۲=m+h \quad h=۲-m \qquad y=mx+۲-m$$

حال یک‌بار x را برابر صفر و بار دیگر y را برابر صفر قرار می‌دهیم. چون نقطه $(۱\ ,\ ۲)$ در ناحیه اول مختصات قرار دارد بنابراین محورها را با طول و عرض پشت قطع می‌کند.

$$x=\frac{m-۲}{m} \quad , \quad y=۲-m$$

$$S=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}\left(\frac{(۲-m)(m-۲)}{m}\right)=\frac{۹}{۲} \Rightarrow ۹=\frac{-(m-۲)^۲}{m} \Rightarrow ۹m=-m^۲+۴m-۴ \Rightarrow m^۲+۵m+۴=۰ \Rightarrow m=-۱\ ,\ -۴$$

بنابراین دو خط وجود دارد. (آزاد تجربی ۸۴) (درس اول ـ نوشتن معادله خط ـ صفحات ۲ و ۳)