

حسابان ۱

۱- گزینه «۲» - روش اول:

$$\begin{aligned} n=1: S_1 &= 2(1) + 2(1)^2 = 5 = a_1 \\ n=2: S_2 &= 2(2) + 2(2)^2 = 16 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = S_2 - a_1 \Rightarrow a_2 = 16 - 5 \Rightarrow a_2 = 11 \\ \text{قدرنسبت } d &= 11 - 5 = 6 \\ a_{17} &= 5 + (17-1)(6) = 101 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ a_{17} &= S_{17} - S_{16} = (2(17) + 2(17)^2) - (2(16) + 2(16)^2) = 2(17-16) + 2(17+16)(17-16) = 2 + 99 = 101 \end{aligned}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (آسان)

۲- گزینه «۴» -

$$\begin{aligned} a_1 + a_{11} &= 40 \Rightarrow a_1 + 10d + a_1 + 10d = 40 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 40 \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = \frac{19}{2} \times 40 = 380 \end{aligned}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ S_{2n} &= 3S_n \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 3(6)(2a_1 + 11d) \\ 10a_1 + 95d &= 18a_1 + 99d = 0 \Rightarrow 8a_1 + 4d = 0 \Rightarrow 2a_1 + d = 0 \\ a_{10} &= a_1 + 9d = 14 \\ \begin{cases} 2a_1 + d = 0 \\ a_1 + 9d = 14 \end{cases} &\Rightarrow a_1 = -2, d = 4 \\ a_{17} &= a_1 + 16d = -2 + 64 = 62 \end{aligned}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_4 = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \Rightarrow 4a_1 + 6d = 15 \\ S_8 &= (a_1 + \dots + a_8) + (a_1 + \dots + a_8) = 15 + 30 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 7d) = 45 \Rightarrow a_1 + 7d = 10 \\ \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ a_1 + 7d = 10 \end{cases} &\Rightarrow a_1 = 3, d = 1 \\ a_{11} &= a_1 + 10d = 3 + 10 = 13 \end{aligned}$$

(کتاب همراه علوی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۵- گزینه «۱» -

$$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{65, 66, \dots, 81\}$$

دسته نهم، ...، دسته دوم و دسته اول

دسته نهم یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 65$ و $d = 1$ و جمله آخر ۸۱ است، در نتیجه:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \Rightarrow 81 = 65 + (n-1)(1) \Rightarrow n = 17 \\ S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(65 + 81) = 1241 \end{aligned}$$

(سراسری تجربی - ۹۹ با تغییر) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۶- گزینه «۳» - نکته: در دنباله هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{2n}}{S_n} &= 1 + q^n \\ \frac{S_{10}}{S_5} &= 1 + q^5 \Rightarrow 1 + q^5 = \frac{211}{243} \Rightarrow q^5 = -\frac{32}{243} \Rightarrow q = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$m = \frac{n}{2} : S_m = \frac{a_1(1-q'^m)}{1-q'} \Rightarrow S_m = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$$

$$S_n = 4S_m$$

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 4 \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = 4 \Rightarrow 1+q=4 \Rightarrow q=3$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$a_1 + \dots + a_7 = 16(a_1 + \dots + a_4) \Rightarrow a_1 + \dots + a_7 = 16(a_1 + \dots + a_4)$$

$$\frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = 16 \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \Rightarrow a_1 = 16a_4$$

$$a_1 = 16(a_1 q^3) \Rightarrow q^3 = \frac{1}{16}$$

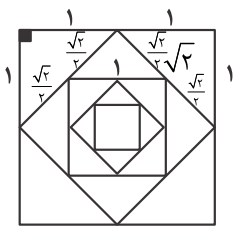
نکته: در دنباله هندسی داریم:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$$

$$\frac{a_{25}}{a_{49}} = q^{25-49} = q^{-24} = \frac{1}{q^{24}} = \left(\frac{1}{q^8}\right)^3 = \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{1}{16^3} = \frac{1}{4096}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (دشوار)

$$A_1 = 4, A_2 = 2, A_3 = 1 \Rightarrow A_1 = 4, A_2 = 2, A_3 = 1$$



$$q = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دنباله هندسی } 4, 2, 1, \dots$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{4(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 8(1-\frac{1}{1024})$$

$$S_{10} = 8(\frac{1023}{1024}) = \frac{1023}{128}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (دشوار)

$$2, 6, 18, \dots \text{ دنباله هندسی } (3^n = 2 \times 18)$$

$$q = 3$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow 6560 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow 3^n - 1 = 6560$$

$$3^n = 6561 \Rightarrow 3^n = 3^8 \Rightarrow n = 8 \text{ جمله هشتم}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 2 \times 3^7 = 4374$$

$$x = 4374$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» - دنباله غیر نزولی: ۱۲, -۸, ۴

دنباله نزولی: ۲, ۶, ۱۸

$$12 + x, x, 8 - x \Rightarrow x^2 = (12 + x)(8 - x) \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$18, 6, 2 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_8}{S_6} = 1 + q^6 \Rightarrow \frac{S_8}{S_6} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{82}{81}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - ارتفاع توپ قبل از آمین پرتاب:

$$h_1 = 9, h_2 = 3, h_3 = 1, \dots$$

و مسافت طی شده توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین:

$$l_1 = 18, l_2 = 6, l_3 = 2, \dots$$

$$S_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n \quad \text{قدرنسبت } q = \frac{1}{3}$$

در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{18(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3^n} = \frac{18}{81} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{81} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow n = 4$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (دشوار)

۱۳- گزینه «۳» -

$$\Delta > 0 : 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$

$$2m^2 - 5m - 7 < 0$$

m	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2m^2 - 5m - 7$	+	-	+	+
		$\frac{7}{2}$		
		$-1 < m < \frac{7}{2}$		

(سراسری - ۹۸) (معادله درجه دوم - حل معادله درجه دوم) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» - α و β ریشه‌های معادله:

$$\alpha = 2\beta + 1$$

$$\alpha \cdot \beta = 2\beta^2 + \beta \xrightarrow{\alpha = 2\beta + 1} 2\beta^2 + \beta - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\beta = 1 : 1 + m + 3 = 0 \Rightarrow m = -4$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» - P : ضرب ریشه‌ها

$$P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-k}{k+3} < 0$$

$$k < -3 \text{ یا } k > 1$$

k	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$\frac{1-k}{k+3}$	-	+	-	-
		$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» -

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = 2$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow P = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = (9 - 2)^2 - 2(1)^2 = 49 - 2 = 47$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» -

$$\Delta x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \{\alpha, \beta\}$$

$$S = -\frac{3}{\Delta}, P = -\frac{2}{\Delta}$$

$$4x^2 - kx + 2\Delta = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$$

$$S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{\frac{9}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta}}{\frac{4}{\Delta^2}} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

(سراسری داخل کشور - ۹۰) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» -

$$\alpha \cdot \beta = -2 \Rightarrow \beta = \frac{-2}{\alpha} \Rightarrow \beta^2 = \frac{-2\gamma}{\alpha^2}$$

$$\alpha^2 - \frac{2\gamma}{\alpha^2} = \alpha^2 + \left(\frac{-2\gamma}{\alpha^2}\right) = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP \xrightarrow{P=-2} (1)^2 - 2(1)(-2) = 10$$

(کتاب همراه علوی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$2x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ P = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$S' = (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = 2S + 2 = 3$$

$$P' = (2\alpha + 1) \cdot (2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 4P + 2S + 1 = -10 + 1 + 1 = -8$$

$$X^2 - S'X + P' = 0 \Rightarrow X^2 - 3X - 8 = 0$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» - روش اول:

$$x = 3 - \sqrt{13} \Rightarrow 3 - x = \sqrt{13}$$

$$(3 - x)^2 = 13 \Rightarrow 9 - 6x + x^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

روش دوم: اگر معادله درجه دوم ضرایبش گویا باشد وقتی $\alpha = 3 - \sqrt{13}$ ، ریشه دیگر $\beta = 3 + \sqrt{13}$ است، پس:

$$S = \alpha + \beta = 3 - \sqrt{13} + 3 + \sqrt{13} = 6$$

$$P = \alpha \cdot \beta = (3 - \sqrt{13})(3 + \sqrt{13}) = 9 - 13 = -4$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)