

حسابان ۱

۱- گزینه «۲» -

$$2b = a + c \Rightarrow 2(3 + 2x) = (4 - x) + (6 + 7x)$$

$$\Rightarrow 6 + 4x = 10 + 6x \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

بنابراین به ازای $x = -2$ مجموع این سه جمله عبارت اند از:

$$6, -1, -8$$

از طرفی چون قدر نسبت برابر $-7 = -6 = (-1) = d$ جمله چهارم نیز (-15) بوده و مجموع چهار جمله اول عبارت اند از:

$$S = 6 + (-1) + (-8) + (-15) = -18$$

(کتاب همگام علوی با تغییر) (دنباله‌ها - مجموع دنباله حسابی) (آسان)

۲- گزینه «۴» - با داشتن S_n در دنباله حسابی به دو روش می‌توانیم قدرنسبت را به‌دست آوریم.

الف) به کمک $a_k = S_k - S_{k-1}$ دو جمله متوالی را یافته و قدرنسبت برابر است با:

$$S_n = \frac{n^2}{3} \Rightarrow a_1 = S_1 = \frac{1}{3}, a_2 = S_2 - S_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ب) در دنباله حسابی S_n برحسب n و از درجه دوم است که قدرنسبت برابر است با دو برابر

ضریب n^2 یعنی داریم:

$$S_n = \frac{n^2}{3} \Rightarrow d = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(حاتمی) (دنباله‌ها - مجموع دنباله حسابی) (متوسط)

۳- گزینه «۱» - می‌توانیم در حالت کلی برای $2n$ جمله یا با توجه به فراگیری سوال صرفاً

انتخاب دو جمله عمل کنیم که داریم:

$$a_1, a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 4a_1 \Rightarrow a_1 + a_1q = 4a_1 \Rightarrow 1 + q = 4 \Rightarrow q = 3$$

(سراسری ۹۴ با تغییر) (دنباله‌ها - مجموع دنباله هندسی) (آسان)

۴- گزینه «۳» - در صورتی که بین دو عدد 7 و 448 ؛ تعداد پنج واسطه هندسی درج کنیم

تعداد کل جملات برابر $n = 7$ بوده و $a_1 = 7$ و $a_7 = 448$ خواهند بود که داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_7 = 448 \Rightarrow a_7 = a_1q^6 \Rightarrow 7(q^6) = 448 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = 2 > 0 \Rightarrow 7, 14, 28, \dots \Rightarrow S = 7 + 14 + 28 = 49$$

(حاتمی) (دنباله‌ها - مجموع دنباله هندسی) (متوسط)

۵- گزینه «۴» - با توجه به متقارن بودن رابطه A داریم:

$$A = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$$

$$A^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1, \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4$$

$$A^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 4 + 2 = 6$$

و جذر مثبت A برابر $\sqrt{6}$ خواهد بود. (چون ریشه‌های معادله مثبت‌اند)

(کتاب همگام علوی با تغییر) (معادله درجه دوم - روابط بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - با توجه به این که مجموع ضرایب عددی معادله برابر صفر می‌باشد یکی از

جواب‌های معادله $x = 1$ و عبارت معادله بر $(x - 1)$ بخش‌پذیر بوده که به کمک عمل

تقسیم داریم:

$$(x - 1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)^2 = 0$$

یعنی ریشه‌های معادله برابر ریشه ساده $x = 1$ و ریشه مضاعف $x = 2$ می‌باشد که مجموع

سه ریشه $S = 1 + 2 + 2 = 5$ خواهد بود.

(کتاب درسی با تغییر) (معادله درجه سوم - صفرهای تابع) (دشوار)

۷- گزینه «۱» - اگر α و β را ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + x - 1 = 0$ فرض کنیم داریم:

$$\alpha\beta = \frac{-b}{a} = -1 \text{ و } \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

حال برای معادله‌ای با ریشه‌های $\{\alpha - 2, \beta - 2\}$ خواهیم داشت:

$$s = (\alpha - 2) + (\beta - 2) = \alpha + \beta - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$p = (\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$$

و با جایگزینی در معادله $x^2 - sx + p = 0$ ؛ به معادله درجه دوم $x^2 + 5x + 5 = 0$ در

گزینه اول می‌رسیم.

(حاتمی) (معادله درجه دوم - تبدیل ریشه‌ها) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - با استفاده از مخرج مشترک گرفتن داریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + x^2}{(x^2-x)^2} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x^2-x)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2-x)+1}{(x^2-x)^2} = \frac{16}{9}$$

با انتخاب $x^2 - x = t$ می‌توان نوشت:

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow 16t^2 = 18t + 9 \Rightarrow 16t^2 - 18t - 9 = 0$$

$$\Delta = (18)^2 + (4 \times 9 \times 16) = 18(18 + 32) = 18(50) = 18 \times 2 \times 169$$

$$\Delta = 3^2 \times 2^2 \times 13^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \times 2 \times 13 = 78$$

$$t = \frac{18 \pm 78}{32} \Rightarrow t = \frac{18 + 78}{32} = \frac{96}{32} = \frac{3}{1} > 0$$

(سراسری ۱۴۰۲ با تغییر) (معادله درجه دوم - تغییر متغیر) (دشوار)

۹- گزینه «۲» - می‌بایستی در معادله تقاطع شرط $\Delta = 0$ برقرار باشد که داریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + a = -3x^2 + 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 16a = 0 \Rightarrow a = 1$$

(سراسری ۹۱ با تغییر) (معادله درجه دوم - بحث‌های Δ) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - چون $x = 5$ خط محور تقارن سهمی است؛ ریشه‌های معادله 12 یا 2 - بوده و داریم:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x + 2)(x - 12)$$

و به کمک نقطه $(1, 66)$ به مقدار a می‌رسیم:

$$(1, 66) \in \text{سهمی} \Rightarrow 66 = (3)(-11) \Rightarrow a = -2 < 0$$

$$f(x) = -2(x + 2)(x - 12) \Rightarrow f(0) = (-2)(2)(-12) = 48$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (معادله درجه دوم - ضابطه تابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» -

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \xrightarrow{y=1} \frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x'^2 + x''^2 = s^2 - 2p \text{ و } s = \frac{-b}{a} = 1 \text{ و } p = \frac{c}{a} = -1$$

$$\Rightarrow s^2 - 2p = (1)^2 - 2(-1) = 3$$

(کتاب درسی با تغییر) (معادله درجه دوم - معادله گویا و روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» - دامنه ضابطه طرف اول به صورت اشتراک بازه‌های $x \geq 2$ و $x \leq 5$ یعنی

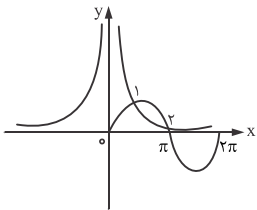
بازه $[2, 5]$ می‌باشد. از طرفی چون جمع دو مقدار رادیکال فرجه زوج در طرف اول همواره

مثبت است می‌بایستی در طرف دوم نیز $x - 7 \geq 0$ و $x \geq 7$ باشد که این امکان‌پذیر نبوده

و معادله جوابی در مجموعه اعداد حقیقی ندارد.

(حاتمی) (معادله گنگ - تعداد جواب‌های معادله گنگ) (آسان)

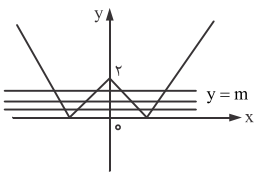
۱۸- گزینه «۳» - با توجه به رسم نمودارهای $f(x) = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ و $g(x) = \frac{1}{|x|}$ داریم:



و دارای ۲ نقطه تلاقی خواهد بود.

(حاتمی) (روش هندسی یا نموداری - تعیین تعداد ریشه‌ها) (دشوار)

۱۹- گزینه «۳» - با توجه به نمودار تابع قدرمطلق $f(x) = |x| - 2$ خط افقی $y = m$ در بازه $(0, 2)$ نمودار تابع را در چهار نقطه قطع کرده و بیش‌ترین مقدار طول این بازه یعنی $b - a = 2$ خواهد بود.



(کتاب درسی یا تغییر) (قدرمطلق - نمودار تابع قدرمطلق) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» - با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها یعنی $x = 2$ و $x = 4$ ، به سه زیر بازه می‌رسیم و در هر یک از آن‌ها وضعیت قدرمطلق‌ها را از نظر مثبت یا منفی بودن معلوم می‌کنیم:

$$۱) x \geq 4 \Rightarrow x - 2 + x - 4 = 5 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{2}, \text{ (ق.ق.)}$$

$$۲) 2 \leq x < 4 \Rightarrow x - 2 - (x - 4) = 5 \Rightarrow 2 \neq 5$$

$$۳) x < 2 \Rightarrow -(x - 2) - (x - 4) = 5 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \text{ (ق.ق.)}$$

$$\text{و } S = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = 6 \text{ خواهد بود.}$$

از طرفی اگر معادله گلدانی $|x - a| + |a - b| = k$ و $k > 0$ ؛ دارای ۲ ریشه حقیقی باشد. مجموع این دو ریشه همان مجموع ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها یعنی $S = a + b = 2 + 4 = 6$ می‌باشد.

(کتاب درسی یا تغییر) (قدرمطلق - معادله قدرمطلق) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» - چون در معادله رابطه $b = a + c$ برقرار می‌باشد؛ ریشه‌های معادله مقادیر ۱-

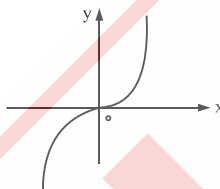
$$\text{یا } \frac{-c}{a} = -\left(\frac{m+2}{2}\right) \text{ خواهند بود که داریم:}$$

$$-\left(\frac{m+2}{2}\right) < -1 \Rightarrow \frac{m+2}{2} > 1 \Rightarrow m+2 > 2 \Rightarrow m > 0.$$

(حاتمی) (معادله درجه دوم - ریشه‌های معادله) (دشوار)

۱۴- گزینه «۱» -

$$f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



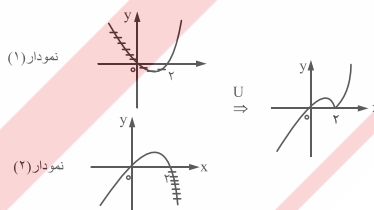
با توجه به نمودار برد تابع یا محدوده y ها؛ برابر $\mathbb{R}$ (تمام اعداد حقیقی) خواهد بود.

(حاتمی) (قدرمطلق - نمودار) (آسان)

۱۵- گزینه «۱» - با در نظر گرفتن دو وضعیت $x \geq 2$ و $x < 2$ به گزینه «۱» می‌رسیم:

$$۱) x \geq 2 \Rightarrow y = x(x-2)$$

$$۲) x < 2 \Rightarrow y = -x(x-2)$$



(حاتمی) (قدرمطلق - نمودار توابع قدرمطلق) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» - با انتخاب $x = 30^\circ$ در بازه داده‌شده؛ ابتدا وضعیت عبارت داخل قدرمطلق از

نظر مثبت یا منفی بودن معلوم می‌گردد همچنین می‌دانیم مطابق نمودار در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

عرض‌های $\cos \alpha$ بزرگ‌تر از $\sin \alpha$ است، که داریم:

$$x = 30^\circ \Rightarrow |\sin 30^\circ - \cos 30^\circ| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| < 0.$$

$$\Rightarrow -(\sin x - \cos x) + \sin x + \cos x = 2 \cos x$$

(حاتمی) (قدرمطلق - مفهوم قدرمطلق) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» - ابتدا در بازه $3 \leq x < 4$ با انتخاب $x = 3$ می‌توانیم وضعیت مثبت یا

منفی بودن هر یک از قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم:

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = (x-3) + (x-4) = 2x-7$$

و برای تقاطع دو تابع خواهیم داشت:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0.$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ یا } -2$$

و در بازه $3 \leq x < 4$ جوابی ندارد. (براساری ۹۷ با تغییر) (قدرمطلق - معادله قدرمطلق) (متوسط)