ریاضی و آمار ۱

۱- گزینه «۳» ـ معادله زمانی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد، پس:

$$\Delta = ۶^۲ - ۴(۹)(۲m-۱) = ۳۶ - ۳۶(۲m-۱) = ۰ \Rightarrow ۳۶[۱-(۲m-۱)] = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

(ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها)

۲- گزینه «۴» ـ می‌دانیم برای آنکه معادله دارای جواب حقیقی باشد، باید $\Delta \geq ۰$ باشد، پس:

گزینه «۱»: $x^۲ + x - a = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱^۲ - ۴\times(-a)\times ۱ = ۱ + ۴a$

این عبارت تنها درصورتی جواب حقیقی دارد که $a \geq \frac{-۱}{۴}$ باشد. (×)

گزینه «۲»: $x^۲ + ۲x + a = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲^۲ - ۴(a)(۱) = ۴ - ۴a$

این عبارت تنها درصورتی جواب حقیقی دارد که $a \leq ۱$ باشد. (×)

گزینه «۳»: $x^۲ - ax + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = a^۲ - ۴(۱)(۱) = a^۲ - ۴$

این عبارت تنها درصورتی جواب حقیقی دارد که $a \geq ۲$ یا $a \leq -۲$ باشد. (×)

گزینه «۴»: $x^۲ - ax - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = a^۲ - ۴(-۱)(۱) = a^۲ + ۴$

به‌ازای تمام مقادیر a، معادله ریشه حقیقی دارد. (✓) پس گزینه «۴» صحیح است. (ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها)

۳- گزینه «۴» ـ

$$x + \frac{۱}{x} = \frac{۲۵}{۱۲} \xrightarrow{\times x} x^۲ - \frac{۲۵}{۱۲}x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = \frac{۶۲۵}{۱۴۴} - ۴ = \frac{۶۲۵ - ۵۷۶}{۱۴۴} = \frac{۴۹}{۱۴۴} \Rightarrow x = \frac{\frac{۲۵}{۱۲} \pm \frac{۷}{۱۲}}{۲}$$

$$x_۱ - x_۲ = \frac{\cancel{\frac{۲۵}{۱۲}} + \frac{۷}{۱۲}}{۲} - \frac{\cancel{\frac{۲۵}{۱۲}} - \frac{۷}{۱۲}}{۲} = \frac{۱۴}{۲۴} = \frac{۷}{۱۲}$$

(ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها)

۴- گزینه «۲» ـ اگر ریشه‌های معادله قرینه باشد، حاصل جمع‌شان صفر می‌شود. پس:

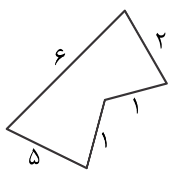
$$\Delta = (m-۲)^۲ - ۴(m-۳)(m-۱) \Rightarrow \Delta = m^۲ - ۴m + ۴ - ۴m^۲ - ۱۲ + ۱۶m \Rightarrow \Delta = -۳m^۲ + ۱۲m - ۸$$

$$x = \frac{-(m-۲) \pm \sqrt{-۳m^۲ + ۱۲m - ۸}}{۲(m-۳)} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{-m+۲}{(m-۳)} = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

(ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها)

۵- گزینه «۱» ـ

$$۳a + a + a - ۱ + ۵ - ۲a + \frac{۵}{۲}a = ۱۵ \Rightarrow \frac{۵}{۲}a + ۳a + ۴ = ۱۵ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}a = ۱۱ \Rightarrow a = ۲$$



پس طول بلندترین ضلع برابر با ۶ است. (ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ معادله و مسائل توصیفی)

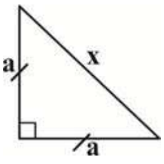
۶- گزینه «۳» ـ

$$x^۲ + ۵x - ۴ = ۳x^۲ - ۲۵x + ۶۸ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳۰x + ۷۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱۵)^۲ - ۴\times(۳۶) = ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱$$

$$x = \frac{۱۵ \pm ۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

(ایمانی) (فصل اول ـ معادله درجه دوم ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها)

۷- گزینه «۱» ـ



$$x^۲ = a^۲ + a^۲ = ۲a^۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{x^۲}{۲}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}a \cdot a = \frac{۱}{۲}a^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{x^۲}{۲} = \frac{x^۲}{۴}$$

$$\text{مساحت مربع} = x^۲ \,,\ \text{مساحت دایره} = \pi r^۲ \overset{(r=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x)}{=} \pi\frac{x^۲}{۲\pi} = \frac{x^۲}{۲}$$

$$\text{مجموع مساحت ها} = ۱۴ \overset{x>۰}{\Rightarrow} x^۲ + \frac{x^۲}{۴} + \frac{x^۲}{۲} = ۱۴ \Rightarrow \frac{۷}{۴}x^۲ = ۱۴ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \text{شعاع } r = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times ۲\sqrt{۲} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}$$

(اکبری) (فصل اول ـ معادله و مسائل توصیفی)

۸- گزینه «۴» ــ از $۲۵x^۲$ نتیجه می‌گیریم، جمله مشترک $۵x$ بوده است. عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲۵x^۲ + ۵x - ۱۲ = (۵x)^۲ + ۱(۵x) - ۱۲ = \underbrace{(۵x - ۳)}_{\text{گزینه ۴}}(۵x + ۴)$$

(اکبری) (فصل اول ــ اتحاد جمله مشترک)

۹- گزینه «۱» ــ عبارت داده شده در سؤال را باز می‌کنیم:

$$a(a+۲) + ۴b(b+۱) + ۴ab = \underline{a}^۲ + ۲a + \underline{۴b^۲} + ۴b + ۴\underline{ab} =$$

جملات خط کشیده شده تشکیل اتحاد مربع می دهند:

$$(a^۲ + ۴b^۲ + ۴ab) + (۲a + ۴b) = (a + ۲b)^۲ + ۲(a + ۲b) =$$

حال $a + ۲b = ۳$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$(۳)^۲ + ۲(۳) = ۱۵$$

(سراسری خارج از کشور ۸۹ ــ با تغییر) (فصل اول ــ اتحاد مربع)

۱۰- گزینه «۲» ــ ابتدا حاصل‌ضرب AB را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\overbrace{x^۲ + ۱۵x - ۱۶}^{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}}}{۴a(x^۲ - x + ۱)} \times \frac{۳x^۳ + ۳}{\underbrace{(x^۲ - ۱)}_{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}}(x + ۱۶)} = \frac{\cancel{(x+۱۶)}\cancel{(x-۱)}۳(x^۳ + ۱)}{۴a(x^۲ - x + ۱)\cancel{(x-۱)}(x+۱)\cancel{(x+۱۶)}} =$$

$$\frac{۳(x^۳ + ۱)}{۴a(x^۲ - x + ۱)(x + ۱)} = \frac{۳\cancel{(x+۱)}\cancel{(x^۲ - x + ۱)}}{۴a\cancel{(x^۲ - x + ۱)}\cancel{(x+۱)}} = \frac{۳}{۴a} \Rightarrow \frac{۳}{۴a} = ۳ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

(اکبری) (فصل اول ــ تجزیه)