

ریاضی ۱

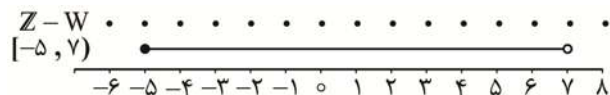
۱- گزینه «۳» - چون A و B دو مجموعه جدا از هم هستند یعنی $A \cap B = \emptyset$ پس $n(A \cap B) = 0$ لذا:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - \underbrace{n(A \cap B)}_0 = 15, |B - A| = |B| = 10$$

$$\Rightarrow 15 = 10 + |A| \Rightarrow |A| = 5$$

(طلوعی) (فصل اول - درس دوم - تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه) (آسان)

۲- گزینه «۴» - با توجه به نمودار اشتراک دو مجموعه $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$ است که ۵ عضو دارد.



(طلوعی) (فصل اول - درس دوم) (آسان)

۳- گزینه «۲» - ابتدا مجموعه $A - \{B\}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$$

که سه عضو و $2^3 = 8$ زیر مجموعه و $8 - 1 = 7$ زیر مجموعه ناتهی دارد. (طلوعی) (فصل اول - درس دوم) (آسان)

۴- گزینه «۱» - در هر مرحله تعداد میزها و صندلی‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \Rightarrow n & \text{تعداد میزها } 1, 2, 3, \dots \\ \Rightarrow 2n + 2 & \text{تعداد صندلی‌ها } 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد میز و صندلی‌ها} = n + 2n + 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2 \Rightarrow a_8 = 26$$

(طلوعی) (فصل اول - درس سوم - الگو و دنباله) (متوسط)

۵- گزینه «۲» - دنباله تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} +5 & +5 \\ \curvearrowright & \curvearrowright \\ 6, & 11, & 16, & \dots \end{matrix}$$

این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است. پس:

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ d &= 5 \end{aligned} \xrightarrow{\text{جمله عمومی}} a_n = a_1 + (n-1)d = 5n + 1 \Rightarrow a_{10} = 51$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله حسابی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» -

$$a_7 = 2a_8 \Rightarrow a_1 + 2d = 2(a_1 + 7d) \Rightarrow a_1 + 14d = 0 \Rightarrow a_{13} = 0 \quad (1)$$

با توجه به اینکه دنباله صعودی است پس: $d > 0$ (۲)

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که جملات a_1 تا a_{12} همگی منفی و جملات a_{14}, a_{15}, \dots همگی مثبت‌اند.

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (آسان)

۷- گزینه «۳» - هر جمله برابر مجموع جمله قبلی و یک عدد فرد است، یعنی:

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$a_3 = a_2 + 5 = 4 + 5 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 7 = 9 + 7 = 16 = 4^2$$

پس هر جمله، مربع شماره آن است.

$$a_{25} = 25^2 = 625$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_3 = a_1 + 2d = 9 \end{cases} \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 3a_1 + 21d = 15 + 42 = 57$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۹- گزینه «۳» -

$$a_1 + a_7 + a_8 = 12 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 12$$

از طرفی:

$$a_1 + 3d = 4$$

$$a_7 + a_k = a_1 + 2d + a_1 + (k_1 - 1)d = 2a_1 + (k + 1)d = 8 \quad (1)$$

چون $a_1 + 3d = 4$ پس $2a_1 + 6d = 8$ با مقایسه رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$k + 1 = 6 \Rightarrow k = 5$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - با توجه به جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - n$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۱) جمله عمومی دنباله حسابی درجه ۱ می‌باشد.

(۲) ضریب n برابر قدرنسبت خواهد بود.

پس $an^2 + (b-1)n + 3$ باید درجه ۱ باشد پس $a = 0$ و ضریب n برابر ۶ است.

$$b - 1 = 6 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a + b = 0 + 7 = 7$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» - اگر اندازه زاویه‌ها را a_1, a_2, a_3, a_4 بنامیم، مجموع آن‌ها 360° می‌باشد.

$$a_1 = 126^\circ$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360^\circ \Rightarrow 4a_1 + 6d = 360^\circ \Rightarrow d = -24^\circ$$

پس:

$$a_4 = 126^\circ + 3(-24^\circ) = 54^\circ$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، داریم $b^2 = a.c$ پس:

$$a^2 = 9 \times 4 \Rightarrow a = \pm 6 \xrightarrow{\text{جملات مثبت اند}} a = 6$$

$$9^2 = a.b \xrightarrow{a=6} b = \frac{81}{6} = 13.5$$

پس مجموع چهار جمله اول برابر $4 + 9 + 6 + 13.5 = 32.5$ (طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۱» - افزایش ۲۵ درصدی قیمت یعنی هر سال $\frac{1}{4}$ به قیمت کالا اضافه می‌شود مثلاً قیمت کالایی که در سال اول a باشد در سال

دوم $a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a$ می‌باشد. می‌توان نتیجه گرفت که قیمت‌های هر ساله دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{5}{4}$ را تشکیل می‌دهند.

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{aq^4}{a} = q^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2/44 = 2/5$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» - سه جمله متوالی دنباله هندسی معمولاً به صورت a, aq, aq^2 در نظر گرفته می‌شوند و حاصل ضرب ۳ جمله متوالی یک تصاعد هندسی، برابر مکعب جمله وسط است.

$$a_1.a_7.a_9 = 216 \Rightarrow (a_7)^3 = 216 \Rightarrow a_7 = 6$$

$$a_1 + a_7 + a_9 = \frac{6}{q} + 6 + 6q = -14 \Rightarrow \frac{1}{q} + q = -\frac{10}{3} \xrightarrow{\times(-2q)} 3q^2 + 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = \frac{-5 \pm \sqrt{16}}{3} = -\frac{1}{3}, -3$$

تنها گزینه «۱» می‌تواند صحیح باشد. (طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (دشوار)

$$a_1 + a_7 = 1 = a_1 + a_1 q^6$$

$$a_1 + a_7 + a_7 + a_7 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 3$$

$$a_1 + a_1 q^6 + \underbrace{(a_1 q + a_1 q^2)}_{q(a_1 + a_1 q^5)} = 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2$$

$$a_1 + r a_1 = \Delta a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\Delta} \times 2^{n-1} \xrightarrow{a_n > 100} \frac{1}{\Delta} \times 2^{n-1} > 100 \Rightarrow 2^{n-1} > 50 \Rightarrow n-1 \geq 9 \Rightarrow n \geq 10$$

یعنی اولین جمله بیشتر از ۱۰۰، جمله دهم است.

$$a_{10} = \frac{1}{\Delta} \times 2^9 = \frac{512}{\Delta} = 102/4$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (دشوار)

۱۶- گزینه «۳» - جملات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2$$

$$\frac{a}{q^2} \times \frac{a}{q} \times a \times aq \times aq^2 = -32 \Rightarrow a^5 = -32 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی:

$$a_7 + a_8 = \frac{a}{q} + aq = -5 \xrightarrow{a=-2} -\frac{2}{q} - 2q = -5 \xrightarrow{\times q} 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \begin{cases} q=2 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ q=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-8 \end{cases}$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (دشوار)

۱۷- گزینه «۱» -

$$a_7 = a_1 + 7 \Rightarrow a_1 q = a_1 + 7 \Rightarrow a_1 q - a_1 = 7 \Rightarrow a_1 (q-1) = 7 \quad (1)$$

$$a_8 = a_7 + 63 \Rightarrow a_1 q^2 = a_1 q + 63 \Rightarrow a_1 q^2 - a_1 q = 63 \Rightarrow a_1 q^2 (q-1) = 63 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱) را در رابطه (۲) تقسیم می‌کنیم}} \frac{a_1 (q-1)}{a_1 q^2 (q-1)} = \frac{7}{63} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} q = 3$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» -

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = a_1 q^9$$

$$a_{10}' = a_1' (q')^9 = \frac{1}{2} a_1 (2q)^9 = 2^8 a_1 q^9 \Rightarrow a_{10}' = 256 a_{10}$$

(طلوعی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله‌های حسابی و هندسی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 2(\Delta)$$

$$t_1 \cdot t_9 = t_2 \cdot t_8 = t_3 \cdot t_7 = t_4 \cdot t_6 = (t_5)^2$$

بنابر آن چه گفته شد حاصل ضرب نه جمله اول برابر است با:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 = (t_5)^2 (t_5)^2 (t_5)^2 (t_5)^2 t_5 = (t_5)^9 = 512$$

با توجه به این که $2^9 = 512$ می‌باشد، پس $t_5 = 2$ است.

حالا دقت کنید که برای پیدا کردن حاصل ضرب $t_2 t_4 t_6 t_8$ می‌توان نوشت:

$$2+8 = 4+6 = 2(\Delta)$$

$$t_2 t_4 t_6 t_8 = (t_5)^2 (t_5)^2 = (t_5)^4 = 2^4 = 16$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله هندسی) (متوسط)

t_2, t_3, t_4

$$t_2 = \frac{t_3 + t_4}{2} \Rightarrow 2t_2 = t_3 + t_4 \Rightarrow f(t, r^2) = 2t_2 r + t_1 r^2 \Rightarrow f'_1 r^2 = f'_1 r (2 + r^2) \Rightarrow 2r = 2 + r^2$$

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 * \\ r = 2 \checkmark \end{cases}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس چهارم - دنباله حسابی و هندسی) (دشوار)