

ریاضی ۱

۱- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{aligned} y &= ax + b \\ a &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(\circ, 3)} 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\circ) + b \Rightarrow b = 3$$

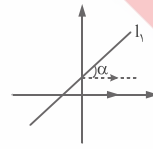
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$$

(مشابه تمرین صفحه ۴۱ کتاب درسی) (فصل دوم - درس ۲ - شیب خط و تانژانت زاویه خط و محور X) (متوسط)

۲- گزینه «۳» -

تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت مجموعه‌ها می‌سازد: شیب خط

$$\left. \begin{aligned} m_{l_1} &= \tan \alpha \\ \alpha + 90^\circ &= 120^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{l_1} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



15° زاویه بین دو خط l_1 و l_2 (زاویه $l_1 > l_2$ زاویه l_1)

$$\Rightarrow m_{l_2} = \tan(30^\circ + 15^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۲ - شیب خط و تانژانت زاویه) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \xrightarrow{\text{انتهای کمان } x \text{ در ربع دوم}} \sin > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

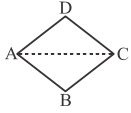
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cot x \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{-1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos x = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

(سراسری تجربی با تغییر) (فصل دوم - درس ۳ - روابط بین نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -



$$\left. \begin{aligned} \cos \hat{B} &= \frac{-3}{5} \Rightarrow \cos^2 \hat{B} = \frac{9}{25} \\ \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \hat{B} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \hat{B} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{چون زاویه B در ربع دوم}} \sin B = \frac{4}{5}$$

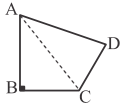
چون قطر لوزی، لوزی را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند:

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$$

$$S_{ABCD} = 2\left(\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B\right) = 2(\Delta)(\frac{4}{5}) = 2$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۱ و ۲ - کاربرد مثلثات در مساحت و روابط بین نسبت‌های مثلثاتی) (دشواری)

۵- گزینه «۱» -



$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} (4)(6) = 12$$

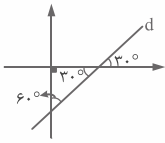
$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \sin \hat{D} = \frac{1}{2} (8)(3)(\sin 45^\circ) = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = 6\sqrt{2} + 12 = 6(\sqrt{2} + 2)$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۱ - مساحت مثلث به کمک مثلثات) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - با توجه به شکل زیر، می‌توان زاویه خط d با جهت مثبت محور x را به‌دست

آورد:



$$d \text{ شیب خط } \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

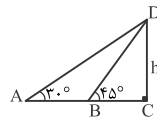
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{x^2 - 8 - 1}{\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{x^2 - 9}{\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3(x^2 - 9) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow 3(x - 3)(x + 3) = (x - 3) \Rightarrow x + 3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۲ - شیب خط و تانژانت زاویه) (دشواری)

۷- گزینه «۱» - با توجه به صورت سؤال می‌توانیم شکل زیر را در نظر بگیریم (A و B ایستگاه راداری و D هواپیما):



$$\tan A = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \tan 37^\circ = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD}{\tan 37^\circ} = \frac{4}{3}CD$$

$$\tan B = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \tan 53^\circ = \frac{CD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CD}{\tan 53^\circ} = \frac{3}{4}CD$$

$$AB = AC - BC \Rightarrow \frac{4}{3}CD - \frac{3}{4}CD = \frac{16-9}{12}CD = \frac{7}{12}CD = 28 \Rightarrow CD = 48 \text{ km}$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۱ - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - با توجه به نسبت‌های مثلثاتی برای دو زاویه متمم داریم:

$$\begin{cases} \sin 70^\circ = \cos 20^\circ \\ \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \end{cases}$$

چون مقدار $\tan 20^\circ$ در سؤال داده شده است همه نسبت‌ها را بر اساس زاویه 20° درجه بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ + 2 \cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{2 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ - \cos 20^\circ} \\ &\Rightarrow \frac{2 \sin 20^\circ + 2 \cos 20^\circ}{2 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ} \xrightarrow[\cos 20^\circ \text{ تقسیم می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج را بر } \cos 20^\circ} \frac{2 \tan 20^\circ + 2}{2 - \tan 20^\circ} \\ &= \frac{2(0.364) + 2}{2 - 0.364} = \frac{2.728}{1.636} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۱ و ۳ - نسبت‌های مثلثاتی و روابط بین آن‌ها) (متوسط)

۹- گزینه «۴» -

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\sqrt{2 \times 3^2} + 2\sqrt{3^2} - \sqrt{2^2 \times 3^2} + 0 / 3\sqrt{2^2 \times 5^2} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(3)\sqrt{2} + (2)(3)(\sqrt{3}) - (2)(3)(\sqrt{3}) + (0/3)(5)(2)(\sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ &\Rightarrow A^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50 \end{aligned}$$

(قندریز) (فصل دوم - درس ۱ - خواص و اعمال روی رادیکال‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» -

$$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{79} < \sqrt[3]{125} \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{79} < 5 \Rightarrow a = 4, b = 5$$

$$2a - 3b = 8 - 15 = -7$$

(قندریز) (فصل سوم - درس ۲ - ریشه سوم) (آسان)

۱۱- گزینه «۲» - روش اول:

$$\sqrt{-x\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}} = \sqrt{-x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^{\frac{15}{6}} \cdot x}} = \sqrt{-x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^{\frac{16}{2}}}}$$

با توجه به این‌که $\sqrt[3]{x^{\frac{16}{2}}}$ نامنفی است، پس باید $-x \geq 0$ باشد تا عبارت زیر رادیکال بزرگ، با معنی شود. با گرفتن $-x = t$ و بازنویسی عبارت داریم:

$$\sqrt{-x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^{\frac{16}{2}}}} \xrightarrow[x=-t]{-x=t} \sqrt{t^{\frac{1}{2}}(-t)^{\frac{16}{2}}} = \sqrt{t^{\frac{1}{2}} \times t^{\frac{16}{2}}} = t^{\frac{17}{4}}$$

$$\xrightarrow[\text{رادیکال به } 2]{\text{ساده کردن فرجه و}} t^{\frac{17}{4}} \xrightarrow{t>0} t^{\frac{1}{4}} = t^{\frac{1}{4}} \times t^{\frac{16}{4}} = t^{\frac{17}{4}}$$

$$\xrightarrow{t=-x} -x^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{(-x)^{\frac{16}{4}}} = -x^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{-x^{\frac{16}{4}}}$$

روش دوم: قرار دادن $x = -1$ و مقایسه گزینه‌ها با جواب عبارت صورت سؤال.

(کتاب کار علوی) (فصل سوم - درس ۱ - ریشه و توان) (دشوار)

۱۲- گزینه «۳» -

$$\text{فرض } a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = \frac{1}{16} \\ a^2 = \frac{1}{4} \\ a^3 = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{16} > -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 > a^4 > a^3 > a$$

(مشابه کتاب کار علوی) (فصل سوم - درس ۱ - توان و ریشه) (آسان)

۱۳- گزینه «۱» -

$$-3 < \frac{\Delta a - 1}{2} < 4 \Rightarrow -6 < \Delta a - 1 < 8 \Rightarrow -5 < \Delta a < 9 \Rightarrow -1 < a < \frac{9}{5}$$

$$a > -1 \Rightarrow a + 1 > 0 \Rightarrow |a + 1| = a + 1; \sqrt[6]{(a + 1)^6} = |a + 1| = a + 1$$

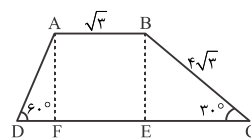
$$\begin{cases} a < \frac{9}{5} \\ \frac{a}{5} < 2 \end{cases} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a - 2 < 0 \Rightarrow |a - 2| = -(a - 2) = 2 - a$$

$$\sqrt[4]{(a - 2)^4} = a - 2 = 2 - a$$

بنابراین:

$$\sqrt[6]{(a + 1)^6} + \sqrt[4]{(a - 2)^4} = (a + 1) + (2 - a) = 3$$

(کتاب کار علوی) (فصل سوم - درس ۲ - ریشه نام) (متوسط)



$$\Delta BCE: \begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CE}{4\sqrt{3}} \Rightarrow CE = 6 \\ \sin 30^\circ = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{4\sqrt{3}} \Rightarrow BE = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow AF = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta ADF: \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{AF}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{AD} \Rightarrow AD = 4 \\ \cos 60^\circ = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DF}{4} \Rightarrow DF = 2 \end{cases}$$

$$DC = DF + FE + EC = 2 + \sqrt{3} + 6 = 8 + \sqrt{3}$$

$$ABCD \text{ محیط} = AB + BC + CD + AD \Rightarrow \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} + 4 = 12 + 6\sqrt{3}$$

(کتاب کار علوی) (فصل دوم - درس ۱ - نسبت‌های مثلثاتی) (دشوار)

۱۵- گزینه «۲» - می‌دانیم اگر دو زاویه X و Y متمم یکدیگر باشند:

$$\sin x = \cos y$$

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 46^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ$$

$$+ \sin^2 89^\circ = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ$$

$$+ \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{تا } 44} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 44 + \frac{1}{2} = 44 \frac{1}{2}$$

(کتاب کار علوی) (فصل دوم - درس ۱ - نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» -

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\sin \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq -\sin \alpha + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$$

(کتاب کار علوی) (فصل دوم - درس ۱ - نسبت‌های مثلثاتی) (آسان)

۱۷- گزینه «۱» -

نکته:

(۱) در ربع اول $0^\circ < x < 45^\circ$ باشد، $\cos x > \sin x$ و اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، $\sin x > \cos x$ خواهد بود.

(۲) در ربع اول اگر $x > y$ باشد، $\tan x > \tan y$ و $\cot x < \cot y$ خواهد بود.

اکنون به بررسی نامساوی‌ها می‌پردازیم:

$$25^\circ < \sin 25^\circ < \cos 25^\circ \Rightarrow 25^\circ < \sin 25^\circ < \cos 25^\circ \quad (\text{الف})$$

بنابراین نامساوی (الف) نادرست است.

$$70^\circ < \sin 70^\circ < \cos 70^\circ \Rightarrow \sin 70^\circ > \cos 70^\circ \quad (\text{ب})$$

بنابراین نامساوی (ب) درست است.

$$68^\circ < \tan 68^\circ < \tan 86^\circ \Rightarrow \tan 68^\circ < \tan 86^\circ \quad (\text{پ})$$

بنابراین نامساوی (پ) نادرست است.

$$25^\circ > \cot 25^\circ > \tan 25^\circ \Rightarrow \cot 25^\circ < \tan 25^\circ \quad (\text{ت})$$

بنابراین نامساوی (ت) نادرست است.

(کتاب کار علوی) (فصل دوم - درس ۲ - مقدار و علامت نسبت‌های مثلثاتی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» -

اگر $0^\circ < x < 45^\circ$ باشد، آن‌گاه $\sin x < \cos x$ است، بنابراین $\sin 40^\circ < \cos 40^\circ$ است و گزینه «۱» نادرست است.

اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، آن‌گاه $\sin x > \cos x$ است و چون $\sin$ و $\cos$ هر دو مثبت

است، بنابراین $\sin^2 x > \cos^2 x$ خواهد بود، بنابراین گزینه «۲» نادرست است.

اگر $90^\circ < x < 135^\circ$ باشد، با توجه به آن‌که در ربع دوم قرار داریم، $\sin$ مثبت و $\cos$

منفی است، بنابراین $\sin x > \cos x$ و بدون در نظر گرفتن علامت $\sin$ و $\cos$ ،

$|\sin x| > |\cos x|$ ، بنابراین $\sin^2 x > \cos^2 x$ ، بنابراین گزینه «۳» نادرست است.

اگر $135^\circ < x < 180^\circ$ باشد، با توجه به آن‌که در ربع دوم قرار داریم، $\sin$ مثبت و $\cos$

منفی است، بنابراین $\sin x > \cos x$ و بدون در نظر گرفتن علامت $\sin$ و $\cos$ ،

$|\cos x| > |\sin x|$ ، بنابراین $\cos^2 x > \sin^2 x$ و گزینه «۴» درست است.

(کتاب کار علوی) (فصل دوم - درس ۲ - ناحیه، مقدار و علامت نسبت‌های مثلثاتی) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» -

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{توان } 2} (1 + \tan^2 x)^2 = \frac{1}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 x)^2 + A(1 + \tan^2 x) = (\tan^2 x + 1)(\tan^2 x - 1)$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 x)[(1 + \tan^2 x) + A] = (\tan^2 x - 1)(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x + A = \tan^2 x - 1 \Rightarrow A + 1 = -1 \Rightarrow A = -2$$

(سرآبروی تجربی - ۷۳) (فصل دوم - درس ۳ - اتحادهای مثلثاتی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» -

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\text{مزدوج}} + \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{1} + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x$$

(سرآبروی با تغییر) (فصل دوم - درس ۲ - اتحادهای مثلثاتی) (متوسط)