

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» - چون سه نوع غذا برای سه شخص متمایز انتخاب می‌شود، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است.

$$p(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب)

۲- گزینه «۲» -

$$p(n, 3) - c(n, 3) = 50 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} - \frac{n!}{(n-3)!3!} = 50$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} - \frac{1}{6} \times \frac{n!}{(n-3)!} = 50 \Rightarrow \frac{5}{6} \frac{n!}{(n-3)!} = 50 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 60 \Rightarrow n = 5$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل و ترکیب)

۳- گزینه «۴» - نکته:

$$\binom{b}{a} + \binom{b}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$$

طبق نکته بالا داریم: $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$ (گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب)

۴- گزینه «۲» - چون کلاً ۵ گل رز وجود دارد پس حداقل ۴ گل رز یعنی باید ۴ یا ۵ گل رز انتخاب شوند. (حرف «یا» به معنی استفاده از اصل جمع است)

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل حالت‌ها} &= \binom{5}{4} \binom{6}{3} + \binom{5}{5} \binom{6}{2} = \frac{5!}{4!1!} \times \frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{5!0!} \times \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \times 4!}{4!} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} + 1 \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} \\ &= 5 \times 20 + 15 = 115 \end{aligned}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب)

۵- گزینه «۳» - ارقام زوج عبارتند از: ۲, ۴, ۶, ۸ چون می‌خواهیم همیشه کنار هم باشند بنابراین ۱ شیء حساب می‌شود.

$$\boxed{2, 4, 6, 8}, 1, 5, 3 \Rightarrow$$

یک شیء

اعداد داخل بسته

$$\text{تعداد جایگشت‌ها} = 4! \times 4!$$

اعداد داخل بسته با اعداد خارج آن

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - جایگشت)

۶- گزینه «۴» - پیشامد این‌که تعداد روها بیشتر از پشت‌ها باشد به صورت زیر است:

(پ ر ر)

$$(ر پ ر) \Rightarrow n = 4$$

(ر ر پ)

(ر ر ر)

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - پیشامد تصادفی)

۷- گزینه «۲» -

$$\frac{(n!)^2}{(n+1)!} = \frac{7}{8} \times (n-1)! \Rightarrow \frac{n! \times n!}{(n+1)! \times (n-1)!} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \times n = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{7}{8} \Rightarrow n = 7$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - فاکتوریل)

۸- گزینه «۳» -

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} &\Rightarrow \text{حالت ۶} \\ \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} &\Rightarrow \text{حالت ۶} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حالت ۱۲}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - اصل ضرب و اصل جمع)

۹- گزینه «۱» -

$$n(s) = 6^2 \times 2^3 = 36 \times 8 = 288$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - فضای نمونه)

۱۰- گزینه «۲» - بررسی گزینه‌ها:

تعداد سوالات = تعداد گزینه‌ها = $n(s) = (4)^3 = 64$

گزینه «۲»: $n(s) = 1 \times 4 \times 3 = 12 \Rightarrow$

۱	۴	۳
---	---	---

 گزینه «۳»: $n(s) = 2^3 = 8$ (تعداد فرزندان) \Rightarrow

۰, ۳, ۵, ۷	۰, ۳, ۵, ۷
------------	------------

گزینه «۴»: $n(s) = 6^1 \times 3^3 = 48$

بنابراین گزینه «۲» صحیح است. (گروه مؤلفان علوی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - فضای نمونه)

۱۱- گزینه «۱» - در کلمه «بوستان» حروف نقطه‌دار عبارتند از: «ب» و «ت» و «ن» لذا اولین خانه سمت راست به ۳ حالت می‌تواند پر شود برای بقیه خانه‌ها شرط خاصی نداریم.



ب و س ت اولی و س ت اولی

$4 \times 5 \times 3 = 60$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - جایگشت)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-3) + (x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 + x^2 - x - 2 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - معادله شامل عبارت‌های گویا)

۱۳- گزینه «۳» -

$$-x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-7}{-1} = 7 \\ x_1 x_2 = \frac{-3}{-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(7)^2 - 4(3)} = \sqrt{49 - 12} = \sqrt{37}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - روابط بین ریشه‌ها)

۱۴- گزینه «۱» - اگر ریشه‌های معادله a, b باشند، داریم:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 5 \end{cases}$$

قرینه و معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{-1}{b}, \frac{-1}{a}$ است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{a} + \frac{-1}{b} &= \frac{-(a+b)}{ab} = \frac{-2}{5} \\ \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-1}{b}\right) &= \frac{1}{ab} = \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = 0$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - روابط بین ریشه‌ها)

۱۵- گزینه «۳» -

گزینه «۱»:

$x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow$

$x^3 - 2x^2 + x = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x - x^3 + 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x - 4 = 0$ معادله درجه یک

گزینه «۲»:

$(x+3)^2 - (x-2)^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x + 4 - 4x = 0 \Rightarrow 6x + 13 = 0$ معادله درجه یک

گزینه «۳»:

$x(2x+2)^2 = 4x^3 - 8x^2 + 16 \Rightarrow 4x^3 + 8x^2 + 4x = 4x^3 - 8x^2 + 16 \Rightarrow 16x^2 + 4x - 16 = 0$ معادله درجه دو

گزینه «۴»:

$4(x+3)^2 + 2 = (2x+7)^2 \Rightarrow 4x^2 + 24x + 38 - 4x^2 - 28x - 49 = 0 \Rightarrow -4x - 11 = 0$ معادله درجه یک

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - تشخیص معادله درجه دوم)

$$\Rightarrow \begin{cases} (ax-1)(x+\frac{b}{3})=0 \\ ax-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{a} \\ x+\frac{b}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{3} \end{cases}$$

از خاصیت عامل صفر

ریشه‌های این معادله یعنی $\frac{1}{a}$ و $-\frac{b}{3}$ باید برابر $\frac{1}{3}$ و -2 باشد. چون a و b اعدادی مثبت‌اند:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$-\frac{b}{3} = -2 \Rightarrow \boxed{b=6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - حل معادله درجه دوم به روش تجزیه)

۱۷- گزینه «۳» -

$$3x^2 + 4x + 5 = 0 \xrightarrow{+3} x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{5}{3} \Rightarrow \xrightarrow[\text{را به دو طرف اضافه می کنیم}]{\text{نصف مربع ضریب } x} x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = -\frac{5}{3} + \frac{4}{9} \Rightarrow (x + \frac{2}{3})^2 = -\frac{11}{9}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل)

۱۸- گزینه «۱» - اگر تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد یعنی دو ریشه با هم برابرند پس معادله $2x^2 - bx + 8 = 0$ دارای ریشه مضاعف است و دلتای آن باید صفر باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 - 4(2)(8) = 0 \Rightarrow \boxed{b=8}$$

پس معادله به صورت $2x^2 - 8x + 8 = 0$ است:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-8)}{2} = 4$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - روش کلی حل معادله درجه ۲)

۱۹- گزینه «۲» -

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2) + (x+1)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 + x^2 - x - 2 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - معادله شامل عبارتهای گویا)

۲۰- گزینه «۲» -

$$3x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow a=3, b=-4, c=-5$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad \text{حاصل ضرب ریشه ها} \quad P = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2SP = \frac{64}{9} - 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{244}{9}$$

(گروه مؤلفان علوی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)