ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» ـ برای زوج بودن عدد موردنظر ۲ حالت داریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\boxed{۶}\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{\overset{\overset{\circ}{\downarrow}}{۱}}\quad \text{طبق اصل ضرب}: ۶\times ۵\times ۴\times ۱ = ۱۲۰$$

حالت دوم: رقم یکان ۲ یا ۶ یا ۸ باشد:

صفر نمی‌تواند باشد. ↓			۲ یا ۶ یا ۸ ↓
۵	۵	۴	۳

$$\text{اصل ضرب}: ۵\times ۵\times ۴\times ۳ = ۳۰۰$$

تعداد کل حالات طبق اصل جمع برابر است با:

$$۱۲۰ + ۳۰۰ = ۴۲۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اصل جمع و اصل ضرب) (دشوار)

۲- گزینه «۳» ـ «ا م ی ر ک ب ی ر»

باید «ر»ها کنار هم و «ی»ها کنار هم باشند:

$$\text{ا}\ \ \text{م}\ \ \text{ک}\ \ \text{ب}\ \ \underbrace{\boxed{\text{ر ر}}}_{\text{یک شیء}}\ \ \underbrace{\boxed{\text{ی ی}}}_{\text{یک شیء}} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = ۶!$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (متوسط)

۳- گزینه «۱» ـ چون ۲ شغل برای ۲ شخص متمایز انتخاب می‌شود، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است.

$$P(۶\,,۲) = \frac{۶!}{(۶-۲)!} = \frac{۶!}{۴!} = \frac{۶\times ۵\times ۴!}{۴!} = ۳۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ تبدیل) (آسان)

۴- گزینه «۴» ـ از ۵ عضوی که می‌خواهیم انتخاب کنیم، ۲ عضو $(e\,,g)$ انتخاب شده‌اند، بنابراین ۳ عضو باقی مانده از بین اعضای $\{a\,,b\,,c\,,d\,,f\,,h\}$ انتخاب می‌شود:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{(۶-۳)!\times ۳!} = \frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!\times ۳!} = \frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۶\times ۳!} = ۲۰$$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده، اهمیت ندارد.)

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ترکیب) (متوسط)

۵- گزینه «۳» ـ با هر ۴ نقطه که روی محیط یک دایره باشد، یک مربع ساخته می‌شود و چون جابه‌جایی چهار رأس یک مربع با هم، مربع جدیدی ایجاد نمی‌کند، بنابراین باید از ترکیب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد مربع‌ها} = \binom{۱۱}{۴} = \frac{۱۱!}{(۱۱-۴)!\times ۴!} = \frac{۱۱!}{۷!\times ۴!} = \frac{۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۷!\times ۴\times ۳\times ۲} \Rightarrow \text{تعداد مربع‌ها} = ۳۳۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ترکیب) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ مجموع دو عدد زمانی زوج است که هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشد. در بین اعداد ۱ تا ۹، ۵ عدد فرد و ۴ عدد زوج وجود دارد، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underbrace{\binom{۵}{۱}\times\binom{۵}{۱}}_{\text{هر دو عدد فرد}} + \underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}}_{\text{هر دو عدد زوج}} = ۵\times ۵ + ۴\times ۴ \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = ۲۵ + ۱۶ = ۴۱$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ترکیب) (دشوار)

۷- گزینه «۳» ـ چون حرف g همیشه در کلمه وجود دارد، بنابراین از بین ۴ حرف دیگر، ۲ حرف انتخاب می‌کنیم: $\binom{۴}{۲}$، اما سه حرف انتخاب شده جایگشت $۳!$ دارند، در نتیجه تعداد کلمات عبارت است از:

$$\binom{۴}{۲}\times ۳! = \frac{۴!}{۲!\times ۲!}\times ۳! = \frac{۴\times ۳\times ۲}{۲\times ۲}\times ۳\times ۲ = ۳۶$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ترکیب) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ــ به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند؛ فقط گزینه «۳» این شرط را داراست. (اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ آزمایش‌های تصادفی) (آسان)

۹- گزینه «۱» ــ در کیسه ۸ مهره وجود دارد که ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌شود.

$$n(s)=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!\times ۳!}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!\times ۶}=۵۶$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ فضای نمونه) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ــ فضای نمونه هر کدام از آزمایش‌های تصادفی را به‌دست می‌آوریم:

گزینه «۱»: ۳ سؤال داریم که هر سؤال ۴ گزینه دارد: $n(s)=۴^۳=۶۴$

گزینه «۲»: اعداد سه رقمی مضرب ۳ با ارقام ۹ , ۵ , ۴ , ۳:

$$\boxed{۳\,|\,۲\,|\,\underset{\substack{\downarrow\\ ۳\,,\,۹}}{۲}}\Rightarrow n(s)=۳\times ۲\times ۲=۱۲$$

گزینه «۳»:

$$\begin{aligned}&۲^۲=۴ : \text{دو سکه}\\ &۶ : \text{یک تاس}\end{aligned}\Rightarrow n(s)=۶\times ۴=۲۴$$

گزینه «۴»: جنسیت هر فرزند ۲ حالت دارد: $n(s)=۲^۵=۳۲$

(اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ فضای نمونه) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ــ حداقل ۳ فرزند پسر باشد؛ یعنی ۳ فرزند پسر یا ۴ فرزند پسر یا ۵ فرزند پسر باشند، با استفاده از فرمول ترکیب داریم:

$$n(A)=\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}+\frac{۵!}{۴!\times ۱!}+۱=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۳!}+\frac{۵\times ۴!}{۴!}+۱=۱۰+۵+۱=۱۶$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ پیشامد) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» ــ از بین ارقام داده شده، فقط ۶ عدد مضرب ۳ هستند:

۳ , ۶ , ۳۶ , ۹ , ۴۲ , ۱۲

چون ترتیب اعداد اهمیتی ندارد، از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$n(A)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times ۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!\times ۶}=۲۰$$

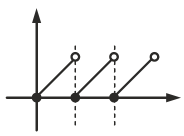
(اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ پیشامد) (متوسط)

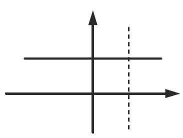
۱۳- گزینه «۲» ــ برای این‌که حداکثر ۲ خودکار قرمز باشد، باید ۲ خودکار قرمز یا ۱ خودکار قرمز یا صفر خودکار قرمز داشته باشیم:

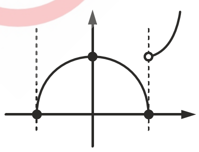
$$n(A)=\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۲}}\times\underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۱}}+\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۱}}\times\underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۲}}+\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۰}}\times\underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۳}}\Rightarrow n(A)=۶\times ۵+۴\times ۱۰+۱\times ۱۰=۳۰+۴۰+۱۰=۸۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ پیشامد) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ــ گزینه «۱» نمودار مربوط به یک تابع نمی‌باشد. بر روی خط $x=۱$ دو نقطه قرار گرفته‌اند که دارای x یکسان و y متفاوت می‌باشند، پس این نمودار تابع نیست. در بقیه گزینه‌ها چون هر خط موازی محور yها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، تابع می‌باشند.

گزینه «۲»: 

گزینه «۳»: 

گزینه «۴»: 

(اکبری) (پایه دهم ــ فصل دوم ــ درس ۱ ــ مفهوم تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» ـ ابتدا مقدار a را حساب می‌کنیم، $f(۲)$ یعنی جای xها در تابع $f(x)$ عدد ۲ قرار دهیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{-ax-۱}}{x+۱}\xrightarrow{f(۲)=۱}۱=\frac{\sqrt{-۲a-۱}}{۲+۱}\Rightarrow\sqrt{-۲a-۱}=۳\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}-۲a-۱=۹$$

$$\Rightarrow -۲a=۱۰\Rightarrow a=-۵\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{۵x-۱}}{x+۱}\Rightarrow f(۱)=\frac{\sqrt{۵-۱}}{۱+۱}=۱$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۲ ـ ضابطه جبری تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» ـ شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ به‌صورت زیر است:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\begin{cases}(-۳,-k)\\(k+۱,-۲)\end{cases}\Rightarrow -۱=\frac{-۲-(-k)}{k+۱-(-۳)}\Rightarrow -۱=\frac{-۲+k}{k+۴}\Rightarrow -k-۴=-۲+k\Rightarrow k=-۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-۳,۱)\\(۰,-۲)\end{cases}\Rightarrow y=mx+h\xrightarrow[\text{خط جایگذاری می کنیم.}]{\text{یکی از نقاط را در این معادله}}-۲=(-۱)(۰)+h\Rightarrow h=-۲$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۳ ـ نمودار تابع خطی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» ـ با داشتن دو نقطه از خط، شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۲,۰)\\(۰,-۲)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{-۲-۰}{۰-۲}=۱$$

$$y=mx+h\xrightarrow[\text{را در معادله خط جایگذاری می کنیم.}]{\text{یکی از نقاط مثلاً }(۰,-۲)}-۲=۱(۰)+h\Rightarrow h=-۲\Rightarrow y=x-۲\Rightarrow y-x=-۲$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۳ ـ نمودار تابع خطی) (متوسط)

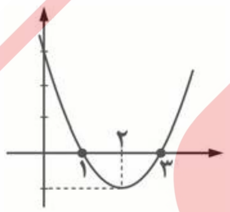
۱۸- گزینه «۳» ـ معادله محور تقارن سهمی به معادله $y=ax^۲+bx+c$ برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

$$y=-\frac{۳}{۲}x^۲+۵x-۷\Rightarrow x=\frac{-۵}{۲(-\frac{۳}{۲})}=\frac{۵}{۳}$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۴ ـ نمودار تابع درجه دوم) (آسان)

۱۹- گزینه «۲» ـ چون ضریب $x^۲$ مثبت است، دهانه سهمی رو به بالاست. مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$x_s=-\frac{b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(۱)}=\frac{۴}{۲}=۲$$



$$y_s=(۲)^۲-۴(۲)+۳=۴-۸+۳=-۱\xrightarrow{\text{رأس سهمی}}S(۲,-۱)$$

سهمی را رسم می‌کنیم:

$$y=x^۲-۴x+۳\Rightarrow y=(x-۱)(x-۳)$$

$x=۳$ و $x=۱$ محل تقاطع سهمی با محور xها می‌باشد.

$y=۳$ هم محل تقاطع سهمی با محور yها می‌باشد.

سهمی از ناحیه اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۴ ـ نمودار تابع درجه دوم) (متوسط)

۲۰- گزینه «۲» ـ چون ضریب $x^۲$ منفی است بنابراین تابع در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

$$x_s=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۱۰}{۲(-۵)}=۱$$

$$y=-۵(۱)^۲+۱۰(۱)+۸=-۵+۱۰+۸=۱۳$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۴ ـ نمودار تابع درجه دوم) (آسان)