

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» - نموداری معرف یک تابع است که هر خط موازی محور y (عرض‌ها) نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع نکند. در گزینه‌های «۱» و «۲» نمودارهای داده شده در یک مقدار x دو مقدار متفاوت y دارند پس نمی‌توانند معرف تابع باشند. در نمودار گزینه «۳» نیز در یک مقدار x بی‌شمار مقدار y به وجود آمده است. پس نمی‌تواند معرف تابع باشد. (سراسری) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - تابع - مفهوم تابع) (آسان)

۲- گزینه «۲» -

$$f(-1) = 4 \Rightarrow (-1, 4) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{-1 - 2} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow (2, 1) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2 + 1$$

$$y = -x + 3 \Rightarrow f(x) = -x + 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول و سوم - تابع - ضابطه جبری تابع - تابع خطی) (متوسط)

۳- گزینه «۴» -

$$f(1) = 5 \Rightarrow (1, 5) \Rightarrow m = \frac{-9 - 5}{3 - 1} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$f(3) = -9 \Rightarrow (3, -9) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -7(x - 1) \Rightarrow y = -7x + 7 + 5$$

$$y = -7x + 12 \Rightarrow f(x) = -7x + 12$$

$$f(0) = -7(0) + 12 = 0 + 12 = 12$$

$$f(5) = -7(5) + 12 = -35 + 12 = -23 \quad \xrightarrow{\text{برد تابع}} -23 \leq y \leq 12$$

(سراسری) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - تابع - نمودار تابع خطی - دامنه و برد تابع خطی) (متوسط)

۴- گزینه «۱» - اگر x تعداد کالا باشد داریم:

$$70x = \text{معادله درآمد}$$

$$70x - (3000 + 50x) = 70x - 3000 - 50x \Rightarrow$$

$$20x - 3000 = 0$$

ابتدا نقطه سرپایه را به دست می‌آوریم: (نقطه سرپایه، نقطه‌ای است که سود برابر صفر است).

$$20x - 3000 = 0 \Rightarrow 20x = 3000 \Rightarrow x = \frac{3000}{20} = 150$$

پس با تولید ۱۵۰ واحد کالا نه سود وجود دارد و نه ضرر. پس با فروش ۱۵۱ آمین کالا سوددهی آغاز می‌شود.

(کتاب درسی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - نمودار تابع خطی - تابع خطی) (آسان)

۵- گزینه «۲» - دهانه سهمی رو به پایین است. پس ضریب x^2 یعنی a باید منفی باشد. پس گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند. سهمی محور x ها را قطع نکرده است. پس معادله درجه دوم متناظر با آن فاقد ریشه است. (Δ آن منفی است):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

گزینه «۲»:

$$\Delta = (2)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-3) = 4 - 6 = -2$$

گزینه «۳»:

$$\Delta = (4)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 16 - 6 = 10$$

بنابراین گزینه «۲» صحیح است.

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - نمودار تابع درجه ۲ - تابع درجه ۲) (متوسط)

۶- گزینه «۱» -

$$f(x) = -2x^2 + ax - b \Rightarrow a = -2, b = a, c = -b$$

$$-1 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2(-2)} = \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$f(x) = -2x^2 - 4x - b$$

نقطه $A(-1, 5)$ راس سهمی است. پس مختصات آن در معادله سهمی صدق می‌کند:

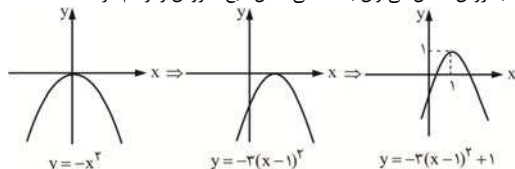
$$5 = -2(-1)^2 - 4(-1) - b \Rightarrow b = -2 + 4 - 5 \Rightarrow b = -3$$

و در نهایت داریم:

$$a + b = -4 + (-3) = -7$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - نمودار تابع درجه ۲ - تابع درجه ۲) (دشوار)

۷- گزینه «۱» - به روش انتقال می‌توان به سادگی شکل تابع مفروض را رسم کرد:



مشاهده می‌شود که نمودار از نواحی اول، سوم و چهارم عبور می‌کند.

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - نمودار تابع درجه ۲ - تابع درجه ۲) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - روش اول:

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y = 15 \Rightarrow y = -x+15$$

$$xy = x(-x+15) = -x^2 + 15x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = x(-x+15) = -x^2 + 15x$$

روش دوم: اگر جمع دو متغیر برابر مقدار ثابتی باشد، ماکزیم حاصل ضرب آن‌ها وقتی رخ می‌دهد که آن دو با هم برابر باشند:

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y = 15$$

طبق قاعده گفته شده:

$$x = \frac{15}{2}, y = \frac{15}{2}$$

$$\max_{xy} = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = \frac{225}{4} = 56.25$$

(سراسری) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - نمودار تابع درجه ۲ - کاربرد تابع درجه ۲) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - می‌دانیم $3! = 6$ است پس:

$$2x^2 - 5 = 3 \Rightarrow 2x^2 = 3 + 5 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\xrightarrow{x>0} x = 2$$

$$x^2 - 4x + 14 = (2)^2 - 4(2) + 14 = 4 - 8 + 14 = 10$$

(سراسری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - فاکتوریل) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» -

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 20 \Rightarrow (n-2)(n-4) = 20$$

$$n^2 - 4n - 3n + 12 = 20 \Rightarrow n^2 - 7n + 12 - 20 = 0$$

$$n^2 - 7n - 8 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-8=0 \Rightarrow n=8 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$P(n, 3) \stackrel{n=8}{=} P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - جایگشت و تبدیل) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» -

$$\frac{S}{1 \times 5 \times 4 \times 3} = 60$$

یا

$$\frac{S}{5 \times 1 \times 4 \times 3} = 60$$

یا

$$\frac{S}{5 \times 4 \times 1 \times 3} = 60$$

یا

$$\frac{S}{5 \times 4 \times 3 \times 1} = 60$$

تعداد کل حالات:

$$60 + 60 + 60 + 60 = 240$$

(سراسری) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - جایگشت) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» -

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 240$$

ارقام ۸ یا ۹

(کتاب درسی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - جایگشت) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» - برای ساخت مثلث باید ۳ نقطه از بین ۱۴ نقطه موجود انتخاب کرد. توجه کنید که ترتیب انتخاب مهم نیست:

$$C(14, 3) = \frac{14!}{(14-3)!3!} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364$$

(تمرین کتاب درسی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - ترکیب) (آسان)

۱۴- گزینه «۳» - ابتدا ۳ رقم فرد از بین ارقام ۹, ۷, ۵, ۳ انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{3}$

سپس یک رقم نیز از بین ارقام زوج ۴, ۶, ۸ انتخاب می‌کنیم: $\binom{3}{1}$

حال جایگشت چهار رقم انتخابی را محاسبه می‌کنیم: ۴!

و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} \times 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 288$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - جایگشت) (دشوار)

۱۵- گزینه «۱» - از آن‌جا که پاسخ به ۴ سوال اول اجباری است. پس از بین ۶ سوال

باقی‌مانده $3 = 7 - 4$ سوال انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 20$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - ترکیب) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» - برای آنکه هیچ مهره‌ای هم‌رنگ نباشد، باید از هر رنگ ۱ مهره انتخاب کرد و

طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{7}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 7 \times 4 \times 3 = 84$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - ترکیب) (آسان)

۱۷- گزینه «۲» - می‌دانیم:

$$\begin{cases} P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \\ C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 14C(n, 2) = 14 \times \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{7n!}{(n-2)!} \\ P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{7n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} \xrightarrow{\text{حذف از طرفین}} \frac{7}{(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف از طرفین}} \frac{7}{n-2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} n-2=7 \Rightarrow n=7+2 \Rightarrow n=9 \\ n^2-n=(9)^2-9=81-9=72 \end{cases}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - تبدیل و ترکیب) (دشوار)

۱۸- گزینه «۱» - نکته: تعداد زیرمجموعه r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

مجموعه A دارای ۷ عضو است. برای آنکه زیرمجموعه‌های پنج عضوی را بیابیم

به‌طوری‌که شامل عضو b و فاقد عضو d باشد، باید حاصل $\binom{5}{4}$ را به‌دست آوریم:

$$\binom{5}{4} = 5$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - ترکیب) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» - برای آنکه از هر دو گروه انتخاب شوند باید حالات زیر را در نظر بگیریم:

الف) ۲ روان‌شناس و ۱ جامعه‌شناس:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

ب) ۱ روان‌شناس و ۲ جامعه‌شناس:

$$\binom{5}{1} \binom{4}{2} = 5 \times 6 = 30$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$40 + 30 = 70$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - آمار و احتمال - شمارش - ترکیب) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» - تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه و یک تاس برابر $2 \times 6 = 12$ و

تعداد پیشامدهای این آزمایش تصادفی $2^{12} = 4096$ است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - آمار و احتمال - احتمال) (متوسط)