

ریاضی و آمار

۱-گزینه «۳» -

$$\left. \begin{aligned} (1, a) \\ (1, a^2 - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

حال $a=2$ و $a=-1$ را امتحان می‌کنیم:

$$a=-1 \Rightarrow f = \{(1, -1), (-1, 3), (1, -1), (2, 0), (3, -1)\} \Rightarrow \text{تابع}$$

$$a=2 \Rightarrow f = \{(1, 2), (2, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \Rightarrow \text{تابع}$$

پس هر دو مقدار ۱- و ۲ قابل قبول اند.

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - تعریف تابع - تابع) (متوسط)

۲-گزینه «۴» - دو خط موازی هیچ نقطه‌ای تلافی با هم ندارند، پس $f(x)$ و $g(x)$ موازی‌اند و لذا شیب‌های آن‌ها با هم برابر است:

$$g(x) = 2x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_g = m_f = 2$$

$$f(x) = y = mx + h \xrightarrow{x=-2, y=3} 3 = (2)(-2) + h \Rightarrow 3 + 4 = h \Rightarrow h = 7$$

$$f(x) = 2x + 7 \xrightarrow{x=0} f(x) = 2(0) + 7 = 7$$

در تابع $f(x) = mx + h$ ، عدد h همان عرض از مبدا (نقطه‌ای با طول صفر) یا محل تلافی خط با محور y ها است.

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - تابع خطی - تابع) (متوسط)

۳-گزینه «۳» -

$$f(-1) = 5 \Rightarrow (-1, 5) \Rightarrow m = \frac{5-1}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1) \Rightarrow \underline{\underline{(-1, 5)}} y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow \underline{\underline{(-1, 5)}} y - 5 = -2(x - (-1))$$

$$y = -2x - 2 + 5 \Rightarrow f(x) = -2x + 3$$

$$\xrightarrow{x=0} f(0) = -2(0) + 3 = 3$$

$$\xrightarrow{x=4} f(4) = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$$

$$\text{برد تابع } -5 < y \leq 3$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - تابع خطی - تابع خطی) (متوسط)

۴-گزینه «۱» - نقطه $(5, 11)$ متعلق به هر دو تابع است؛ پس در هر دو معامله صدق می‌کند:

$$y = ax + b \xrightarrow{(5, 11)} 11 = a(5) + b \Rightarrow 5a + b = 11 \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$y = x^2 - (a+1)x + b \xrightarrow{(5, 11)} 11 = (5)^2 - (a+1)(5) + b$$

$$\Rightarrow 11 = 25 - 5a - 5 + b \Rightarrow 5a - b = 20 - 11 \Rightarrow 5a - b = 9 \quad (2) \text{ رابطه}$$

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 5a - b = 9 \end{cases} \quad \text{روابط (1) و (2):}$$

$$10a = 20 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 5(2) + b = 11 \Rightarrow b = 11 - 10 = 1$$

$$y = x^2 - (2+1)x + 1 \Rightarrow y = x^2 - 3x + 1$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

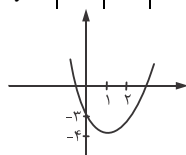
(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - تلافی نمودار دو تابع - تابع، تابع درجه دوم) (دشوار)

۵-گزینه «۴» -

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow a=1, b=-2, c=-3$$

$$S \left| \begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1 \\ f(1) &= y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \end{aligned} \right.$$

x	0	1	2
y	-3	-4	-3



برد تابع، یعنی تصویر تابع بر روی محور y ها که مشاهده می‌شود برد تابع به صورت $y \geq -4$ است.

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - تابع درجه دوم - تابع، تابع درجه دوم) (متوسط)

۶-گزینه «۴» - سهمی رو به پایین است، پس ضریب x^2 باید منفی باشد. (رد گزینه «۱»)

طول نقطه رأس سهمی $x = -2$ است و می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$

به‌دست می‌آید و عرض آن برابر ۵ است:

گزینه «۲» -

$$\frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \quad *$$

گزینه «۳» -

$$\frac{-(-2)}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + 5 = -2 + 4 + 5 = 7 \quad *$$

گزینه «۴» -

$$\frac{-(-2)}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + 3 = -2 + 4 + 3 = 5 \quad \checkmark$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - نمودار تابع درجه دوم - تابع، تابع درجه دوم) (متوسط)

۷-گزینه «۲» -

$$x + a = 10 \Rightarrow a = -x + 10$$

$$y = (a - 5)(x - 2) = (-x + 10 - 5)(x - 2) = (-x + 5)(x - 2)$$

$$= -x^2 + 2x + 5x - 10 = -x^2 + 7x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2(-1)} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = -\frac{7}{2} + 10 = \frac{13}{2}$$

$$y = (\frac{13}{2} - 5)(\frac{7}{2} - 2) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - کاربرد تابع درجه دوم - تابع، تابع درجه دوم) (متوسط)

۸-گزینه «۱» -

$$\text{سود} = (ax + 18) - (-\frac{1}{2}x^2 + 30x) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x - ax - 18$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 30x - ax - 18 = -\frac{1}{2}x^2 + (30 - a)x - 18$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(30 - a)}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{30 - a}{1} = 30 - a$$

طبق فرض مسئله این مقدار برابر ۹ است.

$$30 - a = 9 \Rightarrow 30 - 9 = a \Rightarrow a = 21$$

(سراسری ۱۴۰۰) (پایه دهم - فصل دوم - درس چهارم - کاربرد تابع درجه دوم - تابع، تابع درجه دوم) (دشوار)

۹-گزینه «۴» - دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) رقم یکان صفر باشد:

$$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{1} = 12$$

$$\boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 18$$

همه ارقام به جز صفر و رقم به کار رفته در یکان

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$12 + 18 = 30$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۰-گزینه «۴» - می‌دانیم:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}, P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}^rP(n-1, 3) = \frac{{}^rP(n-1)!}{(n-1-3)!} = \frac{{}^rP(n-1)!}{(n-4)!}$$

$${}^rC(n, 4) = \frac{{}^r n!}{(n-4)!4!}$$

$$\Rightarrow \frac{{}^rP(n-1)!}{(n-4)!4!} = \frac{{}^r n!}{(n-4)!4!} \Rightarrow \frac{{}^rP(n-1)!}{1} = \frac{{}^r n(n-1)!}{4!}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{{}^r n}{24} \Rightarrow {}^r n = 4 \times 24 \Rightarrow n = \frac{4 \times 24}{3} = 4 \times 8 = 32$$

$$n = 32 \xrightarrow{\text{نصف}} 16$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش - آمار و احتمال، شمارش) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» - می‌دانیم $۴! = ۲۴$ است، پس:

$$(\Delta n - ۶)! = ۲۴ \Rightarrow (\Delta n - ۶)! = ۴! \Rightarrow \Delta n - ۶ = ۴$$

$$\Delta n = ۴ + ۶ \Rightarrow \Delta n = ۱۰ \Rightarrow n = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

حال حاصل $P(n, n+1)$ را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{n=2} P(3(2), 2+1) = P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = ۱۲۰.$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - فاکتوریل - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - کلمه «PARASTAR» دارای سه حرف A یکسان و دو حرف R یکسان است که آن‌ها را جداگانه در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\boxed{R, R}, \boxed{A, A, A}, P, S, T$$

حال ۵ شی داریم که جایگشت این پنج شی برابر $۵! = ۱۲۰$ است. (دقت کنید که جایجایی حروف R داخل بسته اول یا حروف A داخل بسته دوم حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند.) (یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - جایگشت - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» - چون مسابقات به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، پس ترتیب مهم است:

$$p(18, 2) = \frac{18!}{(18-2)!} = \frac{18!}{16!} = \frac{18 \times 17 \times 16!}{16!} = ۳۰۶$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل - آمار و احتمال، شمارش) (آسان)

۱۴- گزینه «۱» - اگر شرطی در کار نباشد ۴ انتخاب از میان ۷ شی داریم. اما چون یک شی باید باشد (عدد ۸) پس یک انتخاب از ۴ انتخاب ما حذف می‌شود. ضمناً ۴ هم نباید باشد پس عضوهای ۹، ۶، ۲، ۱، ۰ می‌ماند که باید از بین آن‌ها ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = ۱۰.$$

(سراسری ۱۴۰۱) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» - ابتدا یک حقوق دان انتخاب می‌کنیم: $\binom{5}{1}$ سپس ۲ نفر از مجموع

$$7 = 3 + (5-1) \text{ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم:}$$

$$\binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = 5 \times \frac{7!}{2!5!} = 5 \times \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2} = 5 \times 21 = ۱۰۵$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» - ابتدا ۳ نفر از ۶ نفر سپس ۲ نفر از ۳ نفر باقی مانده و در نهایت ۱ نفر از ۱ نفر باقی مانده را (بدون ترتیب) انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} &= \frac{6!}{3!3!} \times 3 \times 1 \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 1 = 20 \times 3 \times 1 = ۶۰. \end{aligned}$$

(سراسری ۹۳) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب - آمار و احتمال، شمارش) (آسان)

۱۷- گزینه «۴» - برای آنکه حداقل ۲ داوطلب رشته انسانی انتخاب شوند باید حالات زیر را در نظر گرفت:

الف) ۲ داوطلب رشته انسانی و ۱ داوطلب رشته تجربی:

$$\binom{6}{2} \binom{4}{1} = \frac{6!}{2!4!} \times 4 = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} \times 4 = ۱۵ \times 4 = ۶۰.$$

ب) هر سه داوطلب رشته انسانی باشد:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = ۲۰.$$

طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر است با:

$$۶۰ + ۲۰ = ۸۰.$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب - آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» - برای آنکه یک پیشامد رخ دهد کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد. در اینجا هر پیشامدی که برآمد ۳ را داشته باشد رخ داده است و اگر فاقد برآمد ۳ باشد رخ نداده است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - احتمال - آمار و احتمال، احتمال) (آسان)

۱۹- گزینه «۳» - حالتی که یکی از تاس‌ها ۵ باشد عبارتند از:

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

تعداد اعضای پیشامد A برابر ۱۱ است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - احتمال - آمار و احتمال، احتمال) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» - آزمایش پرتاب دو سکه دارای چهار برآمد و دارای $۲^4 = ۱۶$ پیشامد است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - احتمال - آمار و احتمال، احتمال) (متوسط)