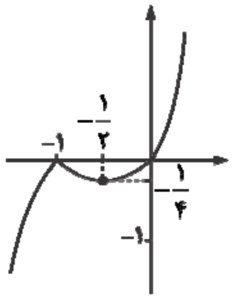
ریاضیات

۱- گزینه «۴» ـ



$$y = x\,|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & x \ge -1 \\ -x(x+1) & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & x \ge -1 \\ -(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & x < -1 \end{cases}$$

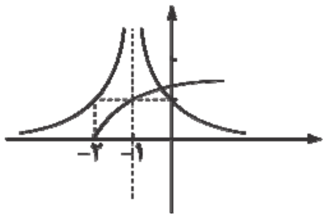
باتوجه به نمودار رسم شده تابع y در بازه $(-\infty , -1] \cup [-\frac{1}{2} , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۲- گزینه «۱» ـ

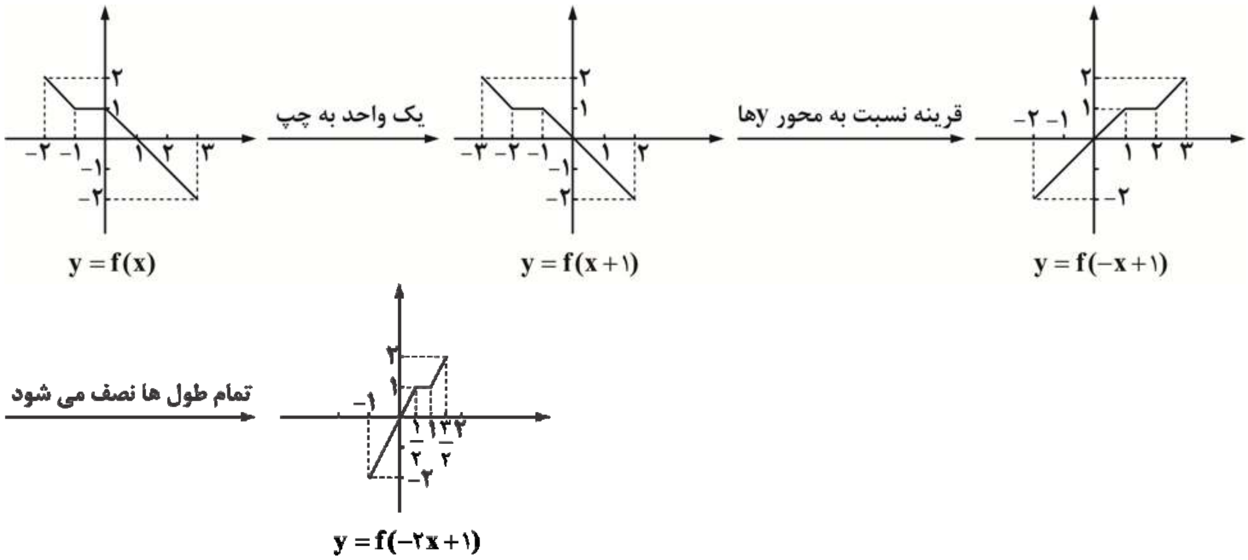
$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{1}{|(\sqrt{x+2})^2 - 1|} = \frac{1}{|x+1|} \xrightarrow{fog(x)=g(x)} \frac{1}{|x+1|} = \sqrt{x+2}$$

برای به‌دست آوردن تعداد جواب‌ها از روش رسم استفاده می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم معادله دارای یک جواب است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ترکیب توابع)

۳- گزینه «۲» ـ



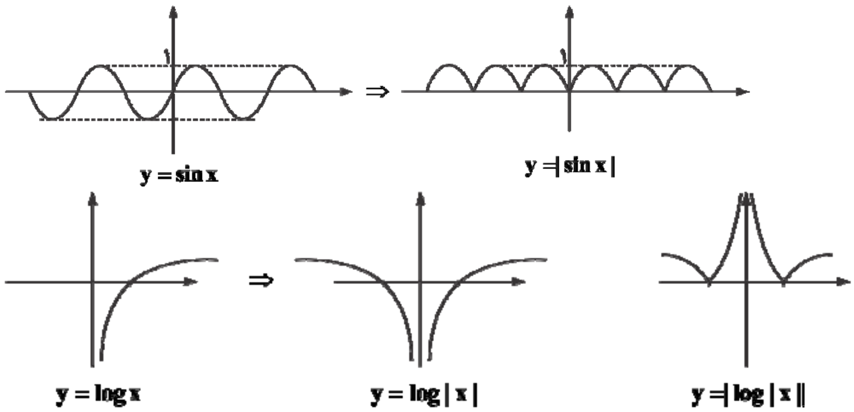
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار توابع)

۴- گزینه «۲» ـ

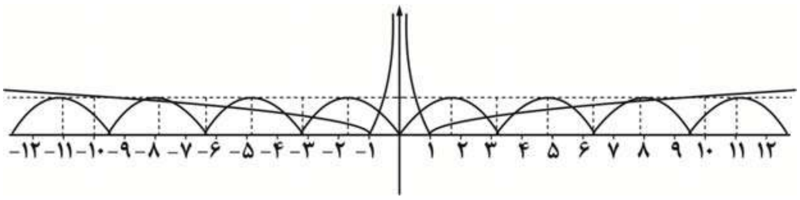
$$\begin{cases} -2 \le \frac{x}{3} - 1 \le -1 \Rightarrow -3 \le x \le 0 \\ 0 < \frac{x}{3} - 1 \le 1 \Rightarrow 3 < x \le 6 \end{cases}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار توابع)

۵- گزینه «۳» ـ نمودار هریک از توابع $y = |\sin x|$ و $y = |\log|x||$ را رسم می‌کنیم:



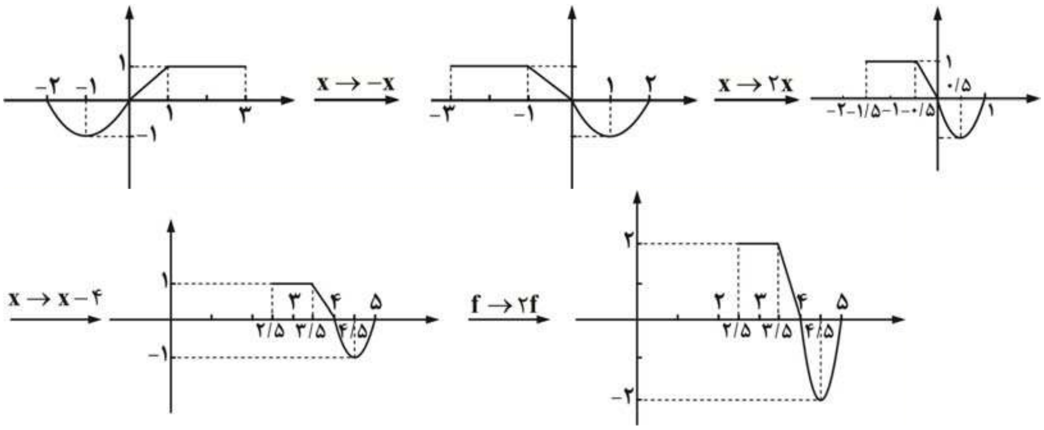
حال نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



توجه کنید که $\log 10 = 1$، بنابراین به‌ازای $x = 10$، مقدار $\log$، یک می‌شود و پس از آن مقدار $\log$ افزایش یافته و دیگر با تابع $y = |\sin x|$ برخورد نخواهد داشت. بنابراین تعداد نقاط برخورد ۶ عدد در سمت راست و ۶ عدد در سمت چپ و در مجموع ۱۲ تا است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار توابع)

۶- گزینه «۳» ـ



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار تابع)

۷- گزینه «۴» ـ

$$g(x) = x^2 \xrightarrow{x \geq 0} g^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}of(x) = \sqrt{[x] - x}$$

با توجه به این‌که:

$$[x] - x = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < \text{عددی} < 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین دامنه $g^{-1}of$ برابر است با $x \in \mathbb{Z}$ و مقدار $g^{-1}of$ همواره برابر صفر خواهد بود. پس تابع $y = 2^{g^{-1}of(x)} = 2^0 = 1$ یک تابع ثابت است. یعنی در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دروس اول، دوم و سوم ـ توابع صعودی و نزولی، ترکیب تابع، وارون تابع / پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ تابع جزء صحیح)

۸- گزینه «۱» ـ

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 2 = (\frac{1}{x} - 1)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = (\frac{1}{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+3} = |\frac{1}{x} - 1| \xrightarrow{x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0} \sqrt{y+3} = -(\frac{1}{x} - 1)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{y+3} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{-\sqrt{y+3} + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{-\sqrt{x+3} + 1} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = 3, d = 1 \Rightarrow ab - cd = -4$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ وارون تابع)

۹- گزینه «۳» ـ

$$f^{-1}og^{-1}(x) = (gof)^{-1}(x)$$

$$(gof)(x) = (\sqrt{x-2})^2 = x - 2 \Rightarrow (gof)^{-1}(x) = x + 2$$

$$D_{gof} = [2, +\infty) \Rightarrow R_{gof} = [0, +\infty) \Rightarrow D_{(gof)^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$\xrightarrow{(gof)^{-1}(x) = 2x+3} x + 2 = 2x + 3 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{-1 \notin D(gof)^{-1}} \text{جواب ندارد}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دروس دوم و سوم ـ ترکیب توابع و وارون توابع)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$(g^{-1}of)^{-1}(x)=(f^{-1}og)(x)=f^{-1}(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=0} g(0)=\frac{3}{4} \Rightarrow (g^{-1}of)^{-1}(0)=f^{-1}(\frac{3}{4})$$

فرض می‌کنیم $x=f^{-1}(\frac{3}{4})$، در این صورت $f(x)=\frac{3}{4}$، بنابراین:

$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{x}=x-\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{توان۲}} x=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16} \Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x+\frac{9}{16}=0 \Rightarrow x=\frac{9}{4}\ \text{و ق ق}\quad x=\frac{1}{4}\ \text{غ ق ق}$$

$$\xrightarrow{x=3} g(3)=-1 \Rightarrow (g^{-1}of)^{-1}(3)=f^{-1}(-1)$$

اگر $x=f^{-1}(-1)$، آن‌گاه $f(x)=-1$ دراین‌صورت:

$$x-\sqrt{x}=-1 \Rightarrow x+1=\sqrt{x} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=-3<0\ \text{غ ق ق} \Rightarrow (g^{-1}of)^{-1}=\{(0,\frac{9}{4})\}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دروس دوم و سوم ـ ترکیب و وارون توابع)

۱۱- گزینه «۴» ـ

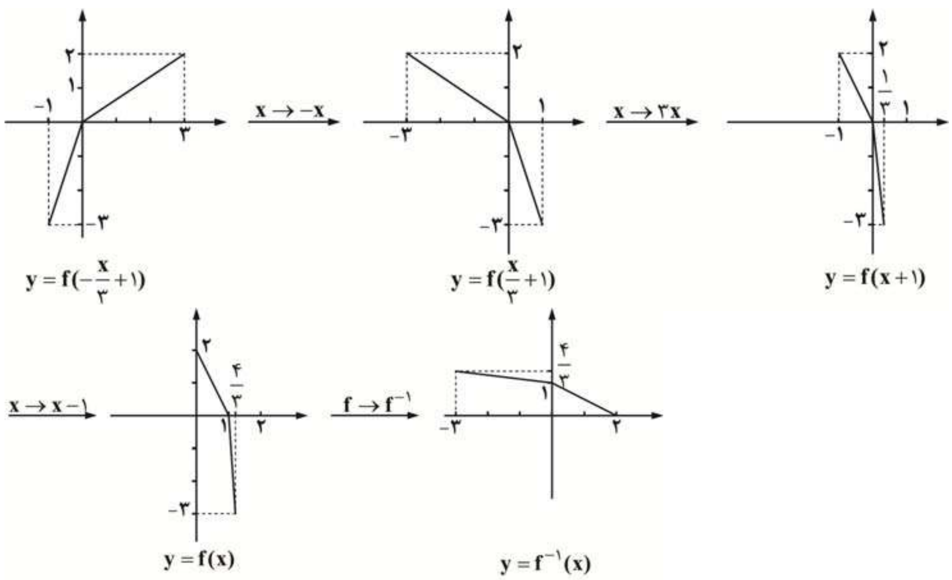
$$D_f=(-\infty,-3] \Rightarrow \frac{x}{2}+1\le -3 \Rightarrow \frac{x}{2}\le -4 \Rightarrow x\le -8 \Rightarrow D_{f(\frac{x}{2}+1)}=(-\infty,-8]$$

$$R_f=[1,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[1,+\infty) \Rightarrow 2x\ge 1 \Rightarrow x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow D_{f^{-1}(2x)}=[\frac{1}{2},+\infty)$$

$$(D_{f^{-1}(2x)}\cup D_{f(\frac{x}{2}+1)})'=([\frac{1}{2},+\infty)\cup(-\infty,-8])'=(-8,\frac{1}{2})$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دروس دوم و سوم ـ تبدیل نمودار توابع و وارون توابع/ پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ متمم یک مجموعه)

۱۲- گزینه «۱» ـ



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم و سوم ـ تبدیل نمودار توابع و وارون توابع)

۱۳- گزینه «۳» ـ بررسی موارد: مورد «الف»:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z},\ f(x)=-1$$

$$-\sin^2\pi x\ne 0 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\mathbb{Z} \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} -1\le -\sin^2\pi x<0 \Rightarrow [-\sin^2\pi x]=-1 \Rightarrow g(x)=-1$$

$$\Rightarrow D_f=D_g,\ f(x)=g(x) \Rightarrow f=g$$

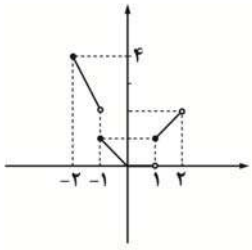
مورد «ب»:

$$-x[x]\ge 0 \Rightarrow x[x]\le 0 \xrightarrow{\text{شکل(۱)}} 0\le x<1 \Rightarrow D_f=[0,1),\ f(x)=0$$

$$\begin{cases}-x^2+x\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le 1\\ x-1\ne 0 \Rightarrow x\ne 1\end{cases} \Rightarrow D_g=[0,1)$$

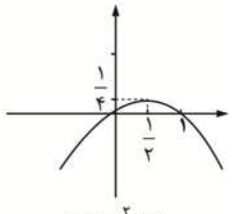
$$y=-x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{شکل(۲)}]{0\le x<1} 0\le y\le\frac{1}{4} \Rightarrow 0\le\sqrt{y}\le\frac{1}{2} \Rightarrow [\sqrt{y}]=0 \Rightarrow g(x)=0$$

$$\Rightarrow D_f=D_g,\ f(x)=g(x) \Rightarrow f=g$$



$y=x[x]$

(شکل ۱)



$y=-x^۲+x$

(شکل ۲)

مورد «پ»: $f(x)=\sqrt{x^۴-۲x^۲+۱}=\sqrt{(x^۲-۱)^۲}=|x^۲-۱| \Rightarrow f(x)\neq g(x) \Rightarrow f\neq g$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ تساوی دو تابع)

۱۴- گزینه «۲» ـ ضابطه هر قسمت از نمودار را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}-x-۱ & x\leq -۱\\ x+۱ & -۱<x<۱\\ -x-۱ & x>۱\end{cases}$$

در بین گزینه‌ها، گزینه «۲» همان ضابطه‌ای که به‌دست آوردیم، است.

$$f(x)=\frac{|۱-x^۲|}{۱-x}=\begin{cases}\dfrac{۱-x^۲}{۱-x} & -۱<x<۱\\ \dfrac{-(۱-x^۲)}{۱-x} & x>۱\,,\,x\leq -۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{(۱-x)(۱+x)}{۱-x}=۱+x & -۱<x<۱\\ \dfrac{-(۱-x)(۱+x)}{۱-x}=-x-۱ & x>۱\,,\,x\leq -۱\end{cases}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ آشنایی با برخی توابع)

۱۵- گزینه «۱» ـ تابع f یک تابع اکیداً صعودی است، بنابراین f و f^{-1} یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. در نتیجه:

$$۳x+\sqrt{x-۲}=x \Rightarrow \sqrt{x-۲}=-۲x$$

باتوجه به دامنه تابع $x\geq ۲$، داریم: $\underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\text{نامنفی}}=\underbrace{-۲x}_{\text{منفی}}$

بنابراین دو تابع برخورد ندارند. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ وارون تابع)

۱۶- گزینه «۳» ـ فرض می‌کنیم $f^{-1}(۳)=a$، دراین صورت: $\begin{cases}f(a)=۳\\ f(a)=g(۳a-۱)\end{cases} \Rightarrow g(۳a-۱)=۳ \Rightarrow g^{-1}(۳)=۳a-۱$

از طرف دیگر: $g^{-1}(۳)=۳\sqrt{۳+۱}=۳\times ۲=۶$

بنابراین: $۳a-۱=۶ \Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ وارون تابع)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x^۲-۱} \Rightarrow x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\\ g(x)=\sqrt{۱-۲^x} \Rightarrow ۱-۲^x\geq ۰ \Rightarrow ۲^x\leq ۱ \Rightarrow x\leq ۰ \Rightarrow D_g=(-\infty,۰]\end{array}\right. \Rightarrow D_{\frac{f^۲}{g^۲}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=(-\infty,-۱]$$

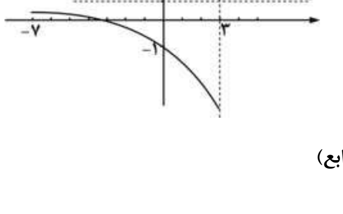
$$D_{\frac{f^۲}{g^۲}}=R_{(\frac{f^۲}{g^۲})^{-1}} \Rightarrow R_{(\frac{f^۲}{g^۲})^{-1}}=(-\infty,-۱]$$

(پایه یازدهم ـ دروس دوم و سوم ـ وارون تابع و اعمال جبری روی توابع)

۱۸- گزینه «۲» ـ باتوجه به نمودارهای f و g، ضابطه‌های آن‌ها برابر است با:

$$f(x)=x+۴ \text{ و } g(x)=x-۵ \Rightarrow \frac{f}{g}(x)=\frac{x+۴}{x-۵}=\frac{x-۵+۹}{x-۵}=۱+\frac{۹}{x-۵}$$

برای رسم تابع $\frac{f}{g}$ باید نمودار $\frac{۱}{x}$ را ۵ واحد به راست انتقال دهیم، سپس مقدار تابع را ۹ برابر کرده و در آخر یک واحد به بالا می‌بریم:



بنابراین تابع $\frac{f}{g}$ از تمام نواحی عبور می‌کند. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۹- گزینه «۴» ـ ضابطه تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}-۲$ است. بنابراین:

$$(f\cdot g)(x)=(\sqrt{x-۱}-۲)(\frac{\sqrt{x-۱}+۲}{x-۵})=\frac{x-۱-۴}{x-۵}=\frac{x-۵}{x-۵}=۱$$
$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=[۱,۵)\cup(۵,+\infty)$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$y=f(x)+g(x)\ \Rightarrow\ g(x)=y-f(x)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\xrightarrow{۰\le x<۱}\begin{cases}f(x)=۰\\ y=-x+۱\end{cases}\Rightarrow\ g(x)=-x+۱\\ \xrightarrow{-۱\le x<۰}\begin{cases}f(x)=-۱\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\ g(x)=-x+۱\end{cases}$$

به‌همین ترتیب برای $x<۱$ داریم: $g(x)=-x+۱=-(x-۱)$

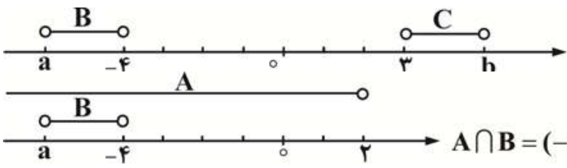
$$\xrightarrow{۱\le x<۲}\begin{cases}f(x)=۱\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\ g(x)=x-۱$$
$$\xrightarrow{۲\le x<۳}\begin{cases}f(x)=۲\\ y=x+۱\end{cases}\Rightarrow\ g(x)=x-۱$$

به همین ترتیب برای $x\ge ۱$ داریم: $g(x)=x-۱$

بنابراین ضابطه تابع g برابر است با: $g(x)=|x-۱|$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۲۱- گزینه «۱» ـ



$B\cup C=(a,-۴)\cup(۳,b)$

$A\cap B=(-\infty,۲)\cap(a,-۴)=(a,-۴)$

$$\Rightarrow\ (B\cup C)-(A\cap B)=(۳,b)\ \Rightarrow\ b=۵$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ بازه‌ها)

۲۲- گزینه «۴» ـ

$$\xrightarrow{a_n>\frac{۳}{۲}}\ \frac{۲n-۷}{۴-۳n}>\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ \frac{۱۳n-۲۶}{۲(۴-۳n)}>۰\ \Rightarrow$$

n		$\frac{۴}{۳}$		۲	
$\frac{۱۳n-۲۶}{۲(۴-۳n)}$	$-$		$+$		$-$

عدد صحیحی در فاصله $(\frac{۴}{۳},۲)$ وجود ندارد. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ دنباله)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$t_{۱۲}+t_{۱۳}+...+t_{۲۱}+t_{۲۲}=۶۰$$
$$t_{۱۲}\quad t_{۱۳}\quad t_{۱۴}\quad t_{۱۵}\quad t_{۱۶}\quad \underset{\text{جمله وسط}}{\boxed{t_{۱۷}}}\quad t_{۱۸}\quad t_{۱۹}\quad t_{۲۰}\quad t_{۲۱}\quad t_{۲۲}$$
$$t_{۱۲}+t_{۲۲}=۲t_{۱۷}\ \text{و}\ t_{۱۳}+t_{۲۱}=۲t_{۱۷}\ \text{و}\ t_{۱۴}+t_{۲۰}=۲t_{۱۷}\ \text{و}\ t_{۱۵}+t_{۱۹}=۲t_{۱۷}\ \text{و}\ t_{۱۶}+t_{۱۸}=۲t_{۱۷}$$
$$\Rightarrow\ t_{۱۲}+...+t_{۲۲}=۱۱t_{۱۷}\ \Rightarrow\ t_{۱۷}=\frac{۶۶}{۱۱}=۶\ \Rightarrow\ t_{۱۷}=t_۱+۱۶d=۶$$
$$\Rightarrow\ \underbrace{t_۱+۱۵d}_{t_{۱۶}}+d=۶\ \Rightarrow\ t_{۱۶}=۶-d$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ دنباله حسابی)

۲۴- گزینه «۱» ـ

$$t_۱+t_۴=\frac{۷}{۳}(t_۲+t_۳)\ \Rightarrow\ t_۱+t_۱r^۳=\frac{۷}{۳}(t_۱r+t_۱r^۲)\ \xrightarrow{\div t_۱}\ \underbrace{(۱+r^۳)}_{(۱+r)(۱+r^۲-r)}=\frac{۷}{۳}\underbrace{(r+r^۲)}_{r(۱+r)}$$
$$\xrightarrow{\div(۱+r)}\ ۱+r^۲-r=\frac{۷}{۳}r\ \Rightarrow\ ۳r^۲-۱۰r+۳=۰$$
$$\Rightarrow\ r=\frac{۵\pm۴}{۳}\begin{cases}۳\ \text{غ ق ق}\\ \frac{۱}{۳}\ \text{ق ق}\end{cases}$$

توجه کنید از آن‌جا که دنباله کاهشی است، $r\neq -۱$ و $t_۱\neq ۰$ بنابراین می‌توان طرفین رابطه بالا را بر $۱+r$ و $t_۱$ تقسیم کرد. همچنین $r=۳$ قابل قبول نیست. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ دنباله هندسی)

۲۵- گزینه «۱» ـ

$$\begin{array}{ccc} t_3 & t_5 & t_7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_1r^2, & t_1r^4, & t_1r^6 \end{array} \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2t_1r^4 = t_1r^2 + t_1r^6 \Rightarrow 2t_1r^4 = t_1r^2(1+r^4) \Rightarrow 2r^2 = 1+r^4 \Rightarrow r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (r^2-1)^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1 \xrightarrow{\text{دنبالـــه حســـابی}} t_1(\pm 1)^2, t_1(\pm 1)^4, t_1(\pm 1)^6 \Rightarrow \cdots, t_1, t_1, t_1, \cdots$$

توجه کنید که اگر $t_1 = 0$ یا $r = 0$ دنباله حسابی به‌صورت $\cdots, 0, 0, 0, \cdots$ خواهد شد و باز هم ثابت است.

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ دنباله حسابی و هندسی)