ریاضیات

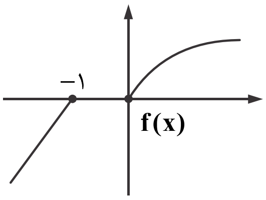
۱- گزینه «۳» ـ نمودار داده شده از تبدیل تابع $x^۳$ به‌دست آمده است. چون مرکز تقارن (۲ , ۲) است پس تابع را به‌صـورت $y = a(x-۲)^۳ + ۲$ در نظر می‌گیریم. تابع از مبدأ عبور کرده است.

$$f(۰)=۰ \Rightarrow -۸a+۲=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

پس تابع موردنظر به‌صورت $y=\frac{۱}{۴}(x-۲)^۳+۲$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل تابع)

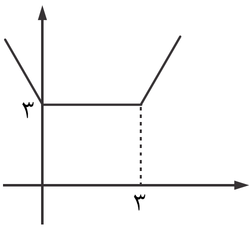
۲- گزینه «۱» ـ چون تابع $\log x$ صعودی اکید است پس تابع $۳+\log x$ نیز صعودی اکید خواهد بود. ضـمناً $\sqrt{x}-۲$ و $-۲x^۳+۱$ نزولـی اکیـد و تابع $x^۲-۴x$ غیر یکنواست. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۳- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که $f(x)$ صعودی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۴- گزینه «۲» ـ نمودار $f(x)$ گلدانی‌شکل است.



این تابع در فاصله [۰ , ۳] ثابت است، پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۳ است. (نصیری) (دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۵- گزینه «۳» ـ

$$(fog)(x)<۰ \Rightarrow \frac{۲}{\frac{x}{x+۱}-۱}<۰ \Rightarrow \frac{۲}{\frac{-۱}{x+۱}}<۰ \Rightarrow x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ترکیب توابع)

۶- گزینه «۲» ـ خروجی‌ها از $f(x)$ و ورودی‌ها از $g(x)$ خواهد بود.

$$\frac{۱}{x+۱}=۱ \Rightarrow x+۱=۱ \Rightarrow x=۰$$

$$\frac{۱}{x+۱}=۲ \Rightarrow x+۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{x+۱}=۵ \Rightarrow x+۱=\frac{۱}{۵} \Rightarrow x=-\frac{۴}{۵}$$

$$D_{fog}=\{۰,-\frac{۴}{۵},-\frac{۱}{۲}\}$$

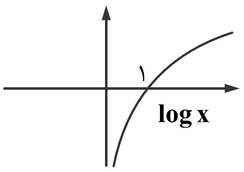
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ترکیب توابع)

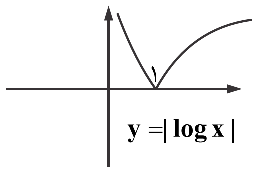
۷- گزینه «۳» ـ

$$R_{f(\frac{x}{۲})}=R_{f(x)}=R_{f(۱-x)}=[-۱,۲) \Rightarrow R_{۲f(۱-x)+۱}=[۲(-۱)+۱,۲(۲)+۱)=[-۱,۵)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل توابع)

۸- گزینه «۴» ـ



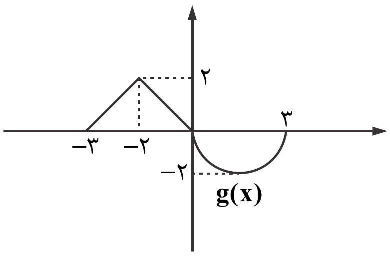


تابع $|\log x|$ در بازه $(۰ , ۱]$ نزولی اکید و در بازه $[۱ , +\infty)$ صعودی اکید است. (نصیری) (دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۹- گزینه «۳» ـ مراحل رسم تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

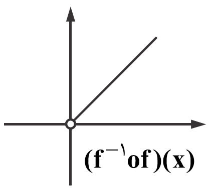
$$f(x) \to f(-x) \to ۲f(-x)$$

اگر نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه و سپس برد آن را دو برابر کنیم، نمودار تابع $g(x)$ به‌دست می‌آید.



تابع $g(x)$ از نواحی دوم و چهارم عبور می‌کند. (نصیری) (دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۱۰- گزینه «۱» ـ



$$(f^{-۱}of)(x) = x \ ، x \in D_f$$
$$D_f = \{x \mid x > ۰\} = (۰ , +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون تابع)

۱۱- گزینه «۱» ـ ابتدا x را برحسب y حساب می‌کنیم.

$$y = -۳ + \sqrt{۲x+۲} \Rightarrow y+۳ = \sqrt{۲x+۲} \Rightarrow (y+۳)^۲ = ۲x+۲ \Rightarrow y^۲ + ۶y + ۹ = ۲x+۲$$
$$\Rightarrow ۲x = y^۲ + ۶y + ۷ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(y^۲ + ۶y + ۷) \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}(x^۲ + ۶x + ۷)$$

اما دامنه تابع وارون برابر برد تابع است.

$$x \geq ۱ \Rightarrow ۲x \geq ۲ \Rightarrow ۲x+۲ \geq ۴ \Rightarrow \sqrt{۲x+۲} \geq ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x+۲} - ۳ \geq -۱ \Rightarrow R_f = D_{f^{-۱}} = [-۱ , +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تابع وارون)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$x + \sqrt{x} + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow g(۳) = ۱$$
$$x + \sqrt{x} + ۱ = ۷ \Rightarrow x + \sqrt{x} = ۶ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow g(۷) = ۴$$
$$g(۳) + g(۷) = ۴ + ۱ = ۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تابع وارون)

۱۳- گزینه «۳» ـ دامنه $f(x)$ برابر $[-۱ , ۳]$ است. پس دامنه تابع $f(۲x)$ برابر $[-\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲}]$ است. دامنه تابع $g(x)$ برابر $[-۲ , ۴]$ است پس دامنه تابع $g(x-۱)$ برابر $[-۱ , ۵]$ است.

$$f(x+۱) = ۰ \Rightarrow x+۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱$$
$$D_g = [-\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲}] \cap [-۱ , ۵] - \{۱\} = [-\frac{۱}{۲} , ۱) \cup (۱ , \frac{۳}{۲}]$$

(نصیری) (دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل توابع)

۱۴- گزینه «۱» ـ بایستی دلتای مخرج صفر شود.

$$\Delta = ۱ - ۴m = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴}$$

$$f(۲) = \frac{۲m+۲}{۴+۲+m} = \frac{\frac{۱}{۲}+۲}{۶+\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵ \times ۲}{۲۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

(نصیری) (یازدهم ـ فصل سوم ـ تابع گویا)

۱۵- گزینه «۱» ـ چون دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابرند پس به ازای هر x از دامنه‌ها با هم برابرند.

$$f(۱)=g(۱) \Rightarrow a+۱=۲+۳ \Rightarrow a=۴$$

برای $x \neq ۱$ هم بایستی $f(x)=g(x)$ باشد.

$$\frac{۲x^۲+mx+n}{x-۱}=۲x+۳ \Rightarrow ۲x^۲+mx+n=۲x^۲+۳x-۲x-۳$$
$$\Rightarrow mx+n=x-۳ \Rightarrow m=۱, n=-۳$$
$$[\frac{m+n+a}{۷}]=[\frac{۱-۳+۴}{۷}]=[\frac{۲}{۷}]=۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ تساوی دو تابع)

۱۶- گزینه «۲» ـ

$$\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{x}}{۳} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲} \geq \frac{\sqrt{x}}{۳} \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow x \leq \frac{۸۱}{۴}$$

از طرفی $x \geq ۰$ است، پس:

$$D_f=[۰, \frac{۸۱}{۴}]=[۰, ۲۰/۲۵]$$

اعداد طبیعی موجود در دامنه تابع $\{۱, ۲, ..., ۲۰\}$ است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ دامنه تابع)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$f(-۱)=-۱ \Rightarrow a=-۱$$
$$f(۰)=۰ \Rightarrow a+b=۰ \Rightarrow b=۱$$
$$f(x)=-۱+\sqrt{x+۱} \Rightarrow f(۳)=-۱+۲=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل تابع)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$۲[x+\frac{۳}{۲}]+[x+\frac{۳}{۲}-۳]=۰$$
$$۲[x+\frac{۳}{۲}]+[x+\frac{۳}{۲}]-۳=۰ \Rightarrow ۳[x+\frac{۳}{۲}]=۳ \Rightarrow [x+\frac{۳}{۲}]=۱ \Rightarrow ۱ \leq x+\frac{۳}{۲}<۲$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq x<\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۱ \leq ۲x<۱ \Rightarrow ۰ \leq ۲x+۱<۲ \Rightarrow ۰ \leq \frac{۲x+۱}{۲}<۱ \Rightarrow [\frac{۲x+۱}{۲}]=۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ تابع جزء صحیح)

۱۹- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=y=ax-b \Rightarrow ax=y+b \Rightarrow x=\frac{y+b}{a} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x+\frac{b}{a}$$
$$\frac{۱}{a}=a \Rightarrow a^۲=۱ \xrightarrow{a<۰} a=-۱$$
$$\frac{b}{a}=۳ \xrightarrow{a=-۱} b=-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-x+۳ \text{ ،} f(x)=-x+۳$$
$$f^{-۱}(x)-f(x)=۰$$

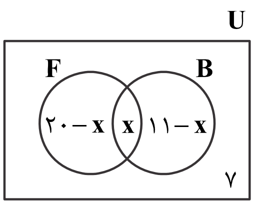
(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ تابع وارون)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۳-۲x}{x}=\frac{x(x^۲-۲)}{x}=x^۲-۲ \text{ ،} x \neq ۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ اعمال توابع)

۲۱- گزینه «۲» ـ اگر $n(A \cap B)=x$ فرض شود، آن‌گاه:



$$۲۰-x+x+۱۱-x+۷=۳۰ \Rightarrow x=۸$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ مجموعه‌ها)

۲۲- گزینه «۱» ـ

$t_n = ۰, ۲, ۰, ۲, \dots$

جملات یکی در میان ۰ و ۲ است پس:

$t_۱ + t_n + \dots + t_{۱۰۰} = ۰ + ۲ + ۰ + \dots + ۲ = ۵۰ \times ۰ + ۵۰ \times ۲ = ۱۰۰$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ دنباله‌ها)

۲۳- گزینه «۳» ـ اگر الگو را به‌صورت $t_n = an^۲ + bn + c$ در نظر بگیریم آن‌گاه:

$$\begin{cases} t_۱ = a + b + c = ۲ \\ t_۲ = ۴a + ۲b + c = ۶ \\ t_{۱۰} = ۱۰۰a + ۱۰b + c = ۱۱۰ \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{-} ۳a + b = ۴ \\ \\ \xrightarrow{-} ۹۶a + ۸b = ۱۰۴ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳a + b = ۴ \\ ۱۲a + b = ۱۳ \end{cases} \xrightarrow{-} ۹a = ۹ \Rightarrow a = ۱, b = ۱, c = ۰$$

$t_n = n^۲ + n \Rightarrow t_۹ = ۸۱ + ۹ = ۹۰$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ الگوی درجه دوم)

۲۴- گزینه «۲» ـ

$۲(۱ - b) = ۲b + b - ۳ \Rightarrow ۲ - ۲b = ۳b - ۳ \Rightarrow ۵b = ۵ \Rightarrow b = ۱$

دنباله: $۲, ۰, -۲, -۴, \dots$

$t_{۱۰} = t_۱ + ۹d = ۲ + ۹ \times (-۲) = -۱۶$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ دنباله حسابی)

۲۵- گزینه «۱» ـ

$t_۲ + t_۴ = ۴t_۳ \Rightarrow t_۱r + t_۱r^۳ = ۴t_۱r^۲ \xrightarrow{\div t_۱r} ۱ + r^۲ = ۴r \Rightarrow r^۲ - ۴r + ۱ = ۰ \Rightarrow r = ۲ \pm \sqrt{۳} \xrightarrow{r < ۰} r = ۲ - \sqrt{۳}$

$\frac{t_۵}{t_۳} = r^۲ = (۲ - \sqrt{۳})^۲ = ۷ - ۴\sqrt{۳}$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ دنباله حسابی)