ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ به کمک رابطه زیر داریم:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$۱۶=۸+۴+n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مجموعه ـ تعداد اعضا) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ مجموعه اعداد اول زوج فقط یک عضو دارد. ($x=۲$) (نصیری) (پایه دهم ـ مجموعه متناهی و نامتناهی) (آسان)

۳- گزینه «۳» ـ این دنباله یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ است.

$$a_۹=a_۴+۵d=۲+۵\times۴=۲۲$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله ـ دنباله حسابی) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ با توجه به این‌که جمله پنجم (-۳) برابر جمله چهارم است، پس قدرنسبت برابر ۳- است، در نتیجه:

$$z=\frac{y}{-۳}=-۳(y-۸)\Rightarrow y=۹y-۷۲\Rightarrow ۸y=۷۲\Rightarrow y=۹$$
$$-۳x=y-۸=۹-۸=۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$
$$-۳z=y=۹\Rightarrow z=-۳$$
$$xyz=-\frac{۱}{۳}\times۹\times-۳=۹$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله ـ دنباله هندسی) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ

$$a_۱=۰\qquad a_{n+۱}=a_n+۱+(-۱)^{n+۱}\ ,\ n\geq۱$$
$$a_۲=a_۱+۲=۲\ ,\ a_۳=a_۲=۲\ ,\ a_۴=a_۳+۲=۴$$

روند جملات به گونه‌ای است که اگر n زوج باشد، $a_n=n$ است و برای nهای فرد هر جمله با جمله قبل خود برابر است.

$$a_۸+a_۹+a_{۱۰}=a_۸+a_۸+a_{۱۰}=۸+۸+۱۰=۲۶$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله) (دشوار)

۶- گزینه «۴» ـ دامنه تابع f نشان می‌دهد که معادله $x^۲-bx-c=۰$ دارای دو ریشه ۲ و ۳ است.

$$(x-۲)(x-۳)=x^۲-۵x+۶\Rightarrow\begin{cases}b=۵\\c=-۶\end{cases}\Rightarrow g(x)=\frac{x}{۵x+۶}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-\frac{۶}{۵}\}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ دامنه تابع گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ

$$\left.\begin{matrix}D_f: x-۴\geq۰\Rightarrow x\geq۴\\D_g: ۲b-x\geq۰\Rightarrow x\leq۲b\end{matrix}\right\}\xrightarrow{D_f=D_g}b=۲$$
$$f(۴)=g(۴)\Rightarrow d=-b=-۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تساوی توابع) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ

$$\sqrt{۱-x}\geq۰\xrightarrow{b<۰}b\sqrt{۱-x}\leq۰\Rightarrow b\sqrt{۱-x}+b^۲+۴b-۴\leq b^۲+۴b-۴$$
$$\Rightarrow b^۲+۴b-۴=۱\Rightarrow b^۲+۴b-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\b=-۵\end{cases}$$

دقت کنید که در این مسئله b باید منفی باشد، پس $b=-۵$ قابل قبول است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تابع گنگ) (متوسط)

۹- گزینه «۲» ـ

$$۱)\ -۱\leq x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow y=-x-۲\Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.$$
$$۲)\ ۰\leq x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow y=-۲\Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.,D\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$$
$$۳)\ ۱\leq x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow y=x-۲\Rightarrow E\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.,F\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$$
$$|AB|\times|CD|\times|EF|=\sqrt{۱+۱}\times\sqrt{۱+۰}\times\sqrt{۱+۱}=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تابع جزء صحیح) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$[x+\underbrace{[\pi]}_{۳}-۱]=\underbrace{\sqrt{۲/۱}}_{۱} \Rightarrow [x]+۲=۱ \Rightarrow [x]=-۱$$

$$\Rightarrow -۱\le x<۰ \Rightarrow -۲\le ۲x<۰ \xrightarrow{+۳} ۱\le ۲x+۳<۳ \Rightarrow [۲x+۳]\in\{۱,۲\}$$

پس مجموع مقادیر ممکن ۳ است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تابع جزء صحیح) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ـ اگر رابطه داده شده برقرار باشد:

$$-۵<۳k+۲\le -۴ \xrightarrow{-۲} -۷<۳k\le -۶ \xrightarrow{\div ۳} -\frac{۷}{۳}<k\le -۲ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-۲$$

پس به‌ازای $k=-۲$ مسئله جواب دارد. (نصیری) (پایه دهم ـ مجموعه ـ زیرمجموعه) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$-۶\le g(x)\le ۴ \Rightarrow -۶\le ۳+۲f(۱-x)\le ۴ \xrightarrow{-۳} -۹\le ۲f(۱-x)\le ۱ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۹}{۲}\le f(۱-x)\le \frac{۱}{۲}$$

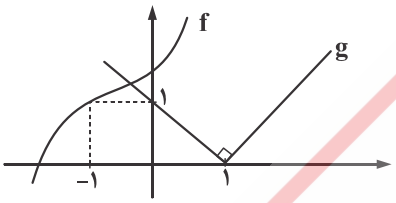
$$\Rightarrow -\frac{۹}{۲}\le f(۱+x)\le \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۳} -\frac{۲۷}{۲}\le h(x)\le \frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ f را به مکعب کامل تبدیل می‌کنیم:

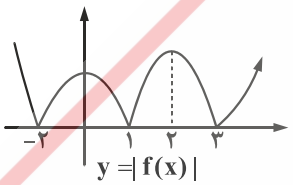
$$f(x)=(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)+۱=(x+۱)^۳+۱$$

مرکز تقارن تابع f برابر $(-۱,۱)$ است.



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

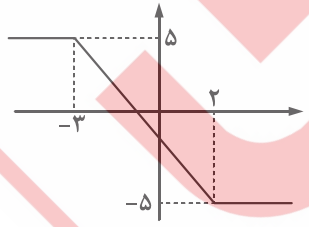
۱۴- گزینه «۳» ـ قسمت‌های زیر محور xها را به بالای محور xها متقارن می‌کنیم:



با توجه به نمودار $|f(x)|$ در بازه‌های $[۰,-۲]$، $[۲,۱]$ و $[۳,+\infty)$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ $|f(x)|$) (متوسط)

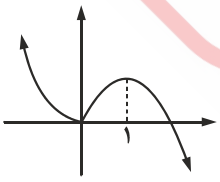
۱۵- گزینه «۴» ـ این تابع سرسره‌ای است.

x	۲	-۳
y	-۵	۵



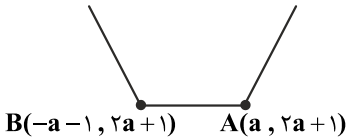
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هیچ بازه‌ای یافت نمی‌شود که در آن تابع f صعودی اکید باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع موردنظر در بازه $[۰,۱]$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» ـ تابع موردنظر گلدانی شکل است. چون $a > 0$ است، پس نمودار تقریبی به‌صورت زیر است:



با توجه به اطلاعات سؤال تابع در فاصله $[-a-1 , a]$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

$$-a-1=-6 \Rightarrow a=5$$

$$b=a=5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (دشوار)

۱۸- گزینه «۲» ـ زوج‌مرتب‌های f را تشکیل می‌دهیم:

$$f=\{(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

حال fof را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} -1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 2 \\ 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow fof=\{(-1,1),(0,2),(1,3),(2,4)\}$$

برد fof برابر $\{4,3,2,1\}$ و مجموع آن‌ها ۱۰ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» ـ

$$f(g(x))=3x^2-x-1 \Rightarrow f(2x+1)=3x^2-x-1$$

$$2x+1=-\frac{3}{4} \Rightarrow x=-\frac{7}{8}$$

$$x=-\frac{7}{8} \Rightarrow f(-\frac{3}{4})=3(-\frac{7}{8})^2-(-\frac{7}{8})-1 \Rightarrow f(-\frac{3}{4})=\frac{3\times 49}{64}+\frac{7}{8}-1=\frac{147+56-64}{64} \Rightarrow f(-\frac{3}{4})=\frac{139}{64}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» ـ ضابطه تابع $f(x)=x+1$ است.

$$(fof)(x)=f(x+1)=x+1+1=x+2$$

$$(fofof)(x)=f(x+2)=x+2+1=x+3$$

$$\frac{(fofof)(x)}{(fof)(x)}=2 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2}=2 \Rightarrow 2x+4=x+3 \Rightarrow x=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (آسان)

۲۱- گزینه «۲» ـ

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq 0 \mid -\sqrt{x}\neq -1\} \Rightarrow D_{fog}=\{x\geq 0 \mid x\neq 1\}=[0,1)\cup(1,+\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=|2x-1|+x=\begin{cases} 3x-1 & x\geq \frac{1}{2} \\ 1-x & x\leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع در بازه‌های $[\frac{1}{2},+\infty)$ و $(-\infty,\frac{1}{2}]$ به‌طور جداگانه یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است، پس گزینه‌ای صحیح است که زیرمجموعه یکی از این بازه‌ها باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون تابع) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» ـ همواره در تابع معکوس‌پذیر $f(x)$ داریم:

$$(f^{-1}of)(x)=x \ , \ x\in D_f$$

چون در این سؤال $D_f=[0,+\infty)$ است، پس جواب نمودار گزینه «۱» است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون و ترکیب) (دشوار)

۲۴- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=y=2x^3+1 \Rightarrow x^3=\frac{y-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(2x+1)=\sqrt[3]{\frac{2x+1-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(2x+1)=\sqrt[3]{x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون تابع) (آسان)

۲۵- گزینه «۲» ـ

$$y=x\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y^2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x)f^{-1}(x)=(x\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2})=x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{13}{6}}=\sqrt[6]{x^{13}}$$

مقدار a برابر ۱۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ وارون تابع) (متوسط)