

ریاضیات

۱- گزینه «۱» - به کمک رابطه زیر داریم:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$16 = 8 + 4 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

(نصیری) (پایه دهم - مجموعه - تعداد اعضا) (آسان)

۲- گزینه «۳» - مجموعه اعداد اول زوج فقط یک عضو دارد. ($x = 2$) (نصیری) (پایه دهم - مجموعه متناهی و نامتناهی) (آسان)

۳- گزینه «۳» - این دنباله یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ است.

$$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3 \times 4 = 14$$

(نصیری) (پایه دهم - دنباله - دنباله حسابی) (متوسط)

۴- گزینه «۴» - با توجه به این که جمله پنجم (-3) برابر جمله چهارم است، پس قدرنسبت برابر ۳- است، در نتیجه:

$$z = \frac{y}{-3} = -2(y - 8) \Rightarrow y = 9y - 72 \Rightarrow 8y = 72 \Rightarrow y = 9$$

$$-3x = y - 8 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$-3z = y = 9 \Rightarrow z = -3$$

$$xyz = -\frac{1}{3} \times 9 \times -3 = 9$$

(نصیری) (پایه دهم - دنباله - دنباله هندسی) (متوسط)

۵- گزینه «۴» -

$$a_1 = 0 \quad a_{n+1} = a_n + 1 + (-1)^{n+1}, n \geq 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 2, a_3 = a_2 + 2 = 4, a_4 = a_3 + 2 = 6$$

روند جملات به گونه‌ای است که اگر n زوج باشد، $a_n = n$ است و برای n های فرد هر جمله با جمله قبل خود برابر است.

$$a_8 + a_9 + a_{10} = a_8 + a_8 + a_{10} = 8 + 8 + 10 = 26$$

(نصیری) (پایه دهم - دنباله) (دشوار)

۶- گزینه «۴» - دامنه تابع f نشان می‌دهد که معادله $x^2 - bx - c = 0$ دارای دو ریشه ۲ و ۳ است.

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{5x+6} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{6}{5}\right\}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - دامنه تابع گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{aligned} D_f : x - 4 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 4 \\ D_g : 2b - x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 2b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{D_f = D_g} b = 2$$

$$f(4) = g(4) \Rightarrow d = -b = -2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تساوی توابع) (متوسط)

۸- گزینه «۲» -

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \xrightarrow{b < 0} b\sqrt{1-x} \leq 0 \Rightarrow b\sqrt{1-x} + b^2 + 4b - 4 \leq b^2 + 4b - 4$$

$$\Rightarrow b^2 + 4b - 4 = 1 \Rightarrow b^2 + 4b - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

دقت کنید که در این مسئله b باید منفی باشد، پس $b = -5$ قابل قبول است. (نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تابع گنگ) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$1) -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x - 2 \Rightarrow A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$2) 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}, D \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$3) 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow E \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$|AB| \times |CD| \times |EF| = \sqrt{1+1} \times \sqrt{1+0} \times \sqrt{1+1} = 2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تابع جزء صحیح) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» -

$$|x + \lfloor \pi \rfloor - 1| = \sqrt{2/1} \Rightarrow |x| + 2 = 1 \Rightarrow |x| = -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow -2 \leq 2x < 0 \xrightarrow{+3} 1 \leq 2x + 3 < 3 \Rightarrow [2x + 3] \in \{1, 2\}$$

پس مجموع مقادیر ممکن ۳ است. (نصیری) (پایه یازدهم - تابع - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» - اگر رابطه داده شده برقرار باشد:

$$-5 < 2k + 2 \leq -4 \xrightarrow{-2} -7 < 2k \leq -6 \xrightarrow{+3} -\frac{7}{2} < k \leq -2 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2$$

پس به ازای $k = -2$ مسئله جواب دارد. (نصیری) (پایه دهم - مجموعه - زیرمجموعه) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» -

$$-6 \leq g(x) \leq 4 \Rightarrow -6 \leq 3 + 2f(1-x) \leq 4 \xrightarrow{-3} -9 \leq 2f(1-x) \leq 1 \xrightarrow{+2} -\frac{9}{2} \leq f(1-x) \leq \frac{1}{2}$$

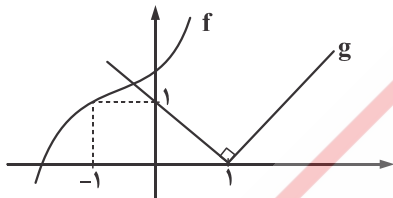
$$\Rightarrow -\frac{9}{2} \leq f(1+x) \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -\frac{27}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» - f را به مکعب کامل تبدیل می‌کنیم:

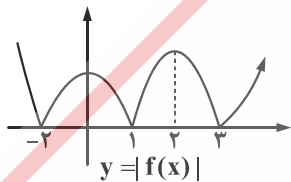
$$f(x) = (x^2 + 2x^2 + 3x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1$$

مرکز تقارن تابع f برابر $(-1, 1)$ است.



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع) (متوسط)

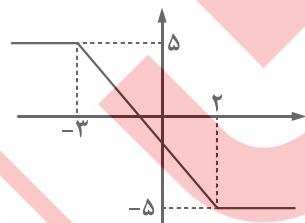
۱۴- گزینه «۳» - قسمت‌های زیر محور x ‌ها را به بالای محور x ‌ها متقارن می‌کنیم:



با توجه به نمودار $|f(x)|$ در بازه‌های $[-2, 0]$ ، $[1, 2]$ ، و $[3, +\infty)$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - $|f(x)|$) (متوسط)

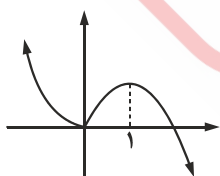
۱۵- گزینه «۴» - این تابع سرسره‌ای است.

x	۲	-۳
y	-۵	۵



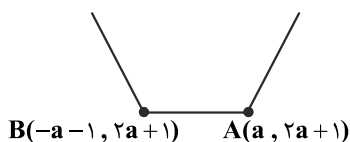
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هیچ بازه‌ای یافت نمی‌شود که در آن تابع f صعودی اکید باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» - نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع موردنظر در بازه $[0, 1]$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - تابع موردنظر گلدانی شکل است. چون $a > 0$ است، پس نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به اطلاعات سؤال تابع در فاصله $[-a-1, a]$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

$$-a-1 = -6 \Rightarrow a = 5$$

$$b = a = 5$$

$$f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (دشوار)

۱۸- گزینه «۲» - زوج مرتب‌های f را تشکیل می‌دهیم:

حال $f \circ f$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 1 \\ 0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 2 \\ 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

برد $f \circ f$ برابر $\{1, 2, 3, 4\}$ و مجموع آن‌ها ۱۰ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» -

$$f(g(x)) = 3x^2 - x - 1 \Rightarrow f(2x+1) = 3x^2 - x - 1$$

$$2x+1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{7}{8}$$

$$x = -\frac{7}{8} \Rightarrow f\left(-\frac{7}{8}\right) = 3\left(-\frac{7}{8}\right)^2 - \left(-\frac{7}{8}\right) - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{3 \times 49}{64} + \frac{7}{8} - 1 = \frac{147 + 56 - 64}{64} \Rightarrow f\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{139}{64}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» - ضابطه تابع $f(x) = x+1$ است.

$$(f \circ f)(x) = f(x+1) = x+1+1 = x+2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(x+2) = x+2+1 = x+3$$

$$\frac{(f \circ f \circ f)(x)}{(f \circ f)(x)} = 2 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2} = 2 \Rightarrow 2x+4 = x+3 \Rightarrow x = -1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (آسان)

۲۱- گزینه «۲» -

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid -\sqrt{x} \neq -1\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \geq 0 \mid x \neq 1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» -

$$f(x) = |2x-1| + x = \begin{cases} 3x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع در بازه‌های $(-\infty, \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2}, +\infty)$ به‌طور جداگانه یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است، پس گزینه‌ای صحیح است که زیرمجموعه یکی از

این بازه‌ها باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون تابع) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» - همواره در تابع معکوس‌پذیر $f(x)$ داریم:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in D_f$$

چون در این سؤال $D_f = [0, +\infty)$ است، پس جواب نمودار گزینه «۱» است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون و ترکیب) (دشوار)

۲۴- گزینه «۲» -

$$f(x) = y = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(2x+1) = \sqrt{\frac{2x+1-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(2x+1) = \sqrt{x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون تابع) (آسان)

۲۵- گزینه «۲» -

$$y = x\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x)f^{-1}(x) = (x\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}) = x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}}$$

مقدار a برابر ۱۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - وارون تابع) (متوسط)

سورس