

ریاضی

۱- گزینه «۱» -

$$f(g(x)) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \sqrt{g(x)+1} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow g(x)+1 = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(1-x)^2 - (1+x)^2}{(1+x)^2} = \frac{-4x}{(1+x)^2} \Rightarrow g\left(\frac{-x}{4}\right) = \frac{x}{(1-\frac{x}{4})^2} = \frac{16x}{(4-x)^2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - ترکیب توابع) (آسان)

۲- گزینه «۲» - باید ضرب x^3 برابر صفر باشد.

$$\frac{2}{3}(4)^3 + m = 0 \Rightarrow \frac{128}{3} + m = 0 \Rightarrow m = -\frac{128}{3}$$

$$f(1) = \frac{2}{3}(2)^3 - \frac{128}{3}(1) = \frac{54 - 128}{3} = -\frac{74}{3}$$

(کتاب درسی) (پایه دوازدهم - فصل اول - ترکیب توابع) (آسان)

۳- گزینه «۳» -

$$(f \circ g)(x) = 7 \Rightarrow 2g(x) - 5 = 7 \Rightarrow g(x) = 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 8 = 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (1)^2 + (2)^2 = 5$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - ترکیب توابع) (آسان)

۴- گزینه «۱» - باید تابع ثابت باشد.

$$f(x) = x^2 + m(x^2 + 2x + 1) - nx + m$$

$$f(x) = (1+m)x^2 + (2m-n)x + 2m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+m=0 \\ 2m-n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1$$

چون g ثابت است بنابراین هم صعودی و هم نزولی خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - توابع یکنوا) (متوسط)

۵- گزینه «۲» - f نزولی اکید است بنابراین:

$$f(|x-1|) > f(4) \Rightarrow |x-1| < 4 \Rightarrow -4 < x-1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - یکنوا) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - نقطه برخورد f و f^{-1} در صورتی که اکیداً صعودی باشد، روی

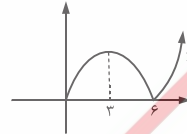
خط $y = x$ خواهد بود. بنابراین نقطه تقاطع f و f^{-1} نقطه $(2, 2)$ است.

$$f(2) = 2 \Rightarrow 8 + 6 + m = 2 \Rightarrow m = -12$$

$$m - n = 2 \xrightarrow{m=-12} -12 - n = 2 \Rightarrow n = -14$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - نمودار تابع را در بازه $[0, +\infty)$ رسم می کنیم.



این تابع در بازه $[3, 6]$ اکیداً نزولی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۳ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - رسم تابع قدرمطلق) (متوسط)

۸- گزینه «۴» - تابع $\sqrt{4 - \frac{x}{2}}$ اکیداً نزولی است. پس برای آن که $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، داریم:

$$8 - k^2 < 0 \Rightarrow k^2 > 8 \Rightarrow k > 2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تبدیل توابع) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$\text{fof}^{-1} = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

با مقایسه داریم:

$$a = 4, b - 1 = 3 \Rightarrow b = 4, c = d = 5$$

بنابراین داریم:

$$a + b + c + d = 4 + 4 + 5 + 5 = 18$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - ترکیب و وارون توابع) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» -

$$f(4) = 0 \Rightarrow f^{-1}(1+0) = f^{-1}(1) \Rightarrow$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{4-x}{1+x} = 1 \Rightarrow 4-x = 1+x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» - دامنه تابع f^{-1} برابر برد تابع f خواهد بود.

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} + a - 2 \geq a - 2 \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [a-2, +\infty)$$

$$a - 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow 2a - 4 = a \Rightarrow a = 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - حداکثر مقدار k در این سوال طول رأس سهمی است.

$$\text{Max}(k) = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(\frac{-1}{2})} = 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - یکنوا) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

$$2x + y = 3 \xrightarrow{y=1} x = 1$$

پس نقطه $(1, 1)$ روی وارون تابع و همچنین روی خود تابع قرار دارد.

$$1 = \sqrt{m-1-1} \Rightarrow 1 = m-2 \Rightarrow m = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - وارون تابع $f(x)$ را حساب می کنیم:

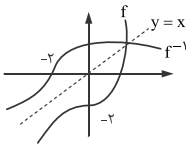
$$y = 3 - \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3-y \Rightarrow x+1 = 9-6y+y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 6y + 8$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f^{-1}(x+1) = (x+1)^2 - 6(x+1) + 8 = x^2 - 4x + 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» - نمودار f و f^{-1} را رسم می کنیم.



نمودار f^{-1} از ناحیه چهارم عبور نمی کند. (نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» -

$$(2k+8) - (k+1) = 10 \Rightarrow k+7 = 10 \Rightarrow k = 3$$

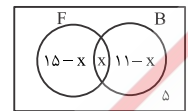
مرکز بازه برابر است با:

$$\frac{2k+8+k+1}{2} = \frac{3k+9}{2} = \frac{3 \times 3 + 9}{2} = 9$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - بازه) (آسان)

۱۷- گزینه «۲» - تعداد اعضای مشترک را x فرض می کنیم و سایر اعضا را درون هر مجموعه

می نویسیم.



کل افراد ۲۵ نفرند پس:

$$15-x+x+11-x+5 = 25 \Rightarrow x = 6$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - تعداد اعضای اجتماع) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» -

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{100} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(\frac{101}{102} - \frac{102}{103}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{102}{103} = \frac{206 - 306}{3 \times 103} = -\frac{100}{309}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - دنباله) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 = \frac{500 + 4}{9} + 1 = 57$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - دنباله حسابی) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» -

$$(2x)^2 = (2-x)(x+3) \Rightarrow 4x^2 = 2x+6-x^2-3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{6}{5} \end{cases}$$

بنابراین دو مقدار برای x به دست می آید.

(نصیری) (پایه دهم - فصل اول - دنباله هندسی) (متوسط)

۲۱- گزینه «۱» - چون تابع f پله ای است پس $k = 2$ است.

$$k = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 2 + 3 + 2 = 7$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - تابع پله ای) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» -

$$t_1 = [-\sqrt{6}] = -3, t_2 = \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}\right] = [-\sqrt{1/5}] = -2, t_3 = \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}\right] = -1$$

$$t_4 = t_5 = \dots = t_{100} = -1$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{100} = -3 - 2 + 98(-1) = -103$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۲۳- گزینه «۴» - برای آن که این تابع یک به یک شود باید $|a| > 1$ باشد.

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - تابع یک به یک) (دشوار)

۲۴- گزینه «۴» -

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{[x] + [-x]} = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x \in \mathbb{Z} \\ -x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

نمودار تابع $\frac{f}{g}$ شبیه گزینه «۴» است.

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - اعمال تابع) (متوسط)

۲۵- گزینه «۴» - دامنه دو تابع را حساب می کنیم.

$$D_f = \{x \mid x^2 - 4 \geq 0\} \cap \{x \mid 4 - x^2 \geq 0\} = \{-2, 2\}$$

$$D_g = \{x \mid x \geq 0\} \cap \{x \mid 3 - x > 0\} = [0, 3)$$

$$D_f \cap D_g = \{2\} \Rightarrow (f^3 - g)(x) = (f(2))^3 - g(2) = 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - اعمال تابع) (دشوار)