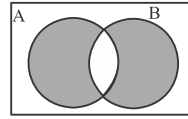


ریاضی

۱- گزینه «۴» - براساس رابطه تفاضل متقارن یا نمودار ون به راحتی اثبات می شود که:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



بنابراین تعداد عضوهای مجهول مسئله برابر $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 24 - 5 = 21$ خواهد بود.

(حاتمی) (پایه دهم - مجموعه ها - تفاضل دو مجموعه) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - با توجه به جدول زیر نظم خاص تعداد جملات در هر دسته برابر است با:

دسته k ا م	...	۳	۲	۱	شماره جمله درست
?	۵	۳	۲	۱	تعداد عضو ها

به کمک دنباله تعداد اعضاها یعنی $1, 3, 5, \dots$ به یک دنباله حسابی یا الگوی خطی از درجه اول برخورد می کنیم که در آن $a_1 = 1$ و $d = 2$ بوده و جمله k ام آن برابر است با:

$$a_k = a_1 + (k-1)d = 1 + (k-1)(2) = 2k - 1$$

و با توجه $a_k = 2k - 1$ ؛ جمله دهم دسته دارای $a_{10} = 19$ جمله خواهد بود.

(سراسری یا تغییر) (پایه دهم - الگو و دنباله - الگو خطی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - با توجه به دنباله حسابی داده شده که در آن $a_1 = 1$ و $d = 4$ است برای جمله n ام داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$$

اگر جمله مورد نظر عدد ۳۳ باشد داریم:

$$4n - 3 = 33 \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow n = 9$$

و برای $4 = \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}\right]$ به دست می آید.

(حاتمی) (پایه دهم - دنباله حسابی - جمله عمومی دنباله حسابی) (متوسط)

۴- گزینه «۴» -

$$\begin{cases} a_7 - a_1 = 18 \Rightarrow a_7 r - a_1 = 18 & (1) \\ a_7 - a_3 = 162 \Rightarrow a_7 r^3 - a_3 r^3 = 162 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 - a_3 = 162 \Rightarrow a_7 r^3 - a_3 r^3 = 162 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{a_1(r-1)}{a_1 r^3(r-1)} = \frac{18}{162} \Rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{9} \Rightarrow r^3 = 9 \xrightarrow{r>0} r = 3$$

(حاتمی) (پایه دهم - دنباله هندسی - جمله عمومی) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} a_6 = 96 \\ a_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^5 = 96 \\ a_1 q^2 = 12 \end{cases} \xrightarrow{\div} q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 q^6 = 12 \Rightarrow a_1(4) = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 q^7 = 12 \Rightarrow (3)(8) = 24$$

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دهم - دنباله ها - دنباله هندسی) (آسان)

۶- گزینه «۴» -

$$f(x) = \frac{x}{[x+1]} = \frac{x}{[x]+1}$$

$$[x]+1=0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1 \leq x < 0\} = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

(کتاب همراه یا تغییر) (پایه یازدهم - تابع - جزء صحیح) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - می بایستی $x = 3$ طول نقطه رأس سهمی باشد که داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{4} = 3 \Rightarrow m = 12$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم - تابع - تابع یک به یک) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - هر یک از ضابطه ها در بازه خود یک به یک بوده و برد آن ها اشتراک ندارند؛ بنابراین تابع وارون پذیر بوده و برای هر ضابطه آن تابع وارون را یافته و در هر یک آن ها برد تابع را منظور می کنیم:

$$y = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y}{2} - 2 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x}{2} - 2$$

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow y^{-1} = x + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 2 & x \geq 4 \\ x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

زیرا $D_{f^{-1}} = R_f$ است.

(کتاب همراه علوی یا تغییر) (پایه یازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۹- گزینه «۲» - می دانیم $0 < \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$ بوده و $\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = 0$ است. بنابراین با توجه به این که دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ بوده و به ازای هر عدد حقیقی؛ مقادیر دو تابع برابر صفر می باشند؛ دو تابع با یکدیگر مساوی بوده و $a = 0$ خواهد بود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - تابع - تساوی دو تابع) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» -

$$(g-2f)(4) = g(4) - 2f(4) \Rightarrow g(4) = \sqrt{2x+1} = 3$$

$$2f(4) = 2(\Delta) = 10 \Rightarrow g(4) - 2f(4) = 3 - 10 = -7$$

(کتاب همراه علوی یا تغییر) (پایه یازدهم - تابع - اعمال مقدماتی روی توابع) (آسان)

۱۱- گزینه «۲» - وقتی که نقطه $A(4, 1)$ واقع بر تابع وارون می باشد می بایستی نقطه متناظر آن یعنی $A'(1, 4)$ واقع بر خود تابع باشد که داریم:

$$f(x) = 2x^3 + x + a \Rightarrow 2(1)^3 + 1 + a = 4 \Rightarrow a = 1$$

(سراسری یا تغییر) (پایه یازدهم و دوازدهم - تابع وارون - مفهوم تابع وارون) (آسان)

۱۲- گزینه «۱» - نمودار از مبدأ مختصات گذشته و می بایستی مختصات $(0, 0)$ در تابع صدق کند:

$$O(0, 0) \in f \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x^3 + ax^2$$

از طرفی ریشه ساده $x = 3$ در معادله به دست آمده نیز صدق خواهد کرد:

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow 27 + 9a = 0 \Rightarrow a = -3$$

و به تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2$ می رسمیم که در آن $f(4) = 16$ خواهد بود.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع - نمودار تابع درجه سوم) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

می دانیم در صورت صعودی بودن تابع $f(x)$ ؛ محل تلاقی نمودارهای $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بر روی خط $y = x$ می باشد:

$$\sqrt{\Delta x - 4} = x \geq 0 \Rightarrow \Delta x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 4$$

بنابراین $\Delta = 5$ خواهد بود. (کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» - می دانیم دامنه تابع مرکب $(f \circ g)(x)$ از دامنه تابع $g(x)$ به دست می آید؛

بنابراین برای تابع $(f \circ f^{-1})$ نیز بایستی $D_{f^{-1}}$ را به دست آوریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$$

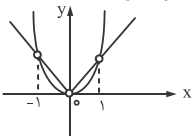
به دلیل اکیداً صعودی بودن تابع $f(x)$ در بازه $x \geq 2$ با جایگزینی $x = 2$ به برد تابع می رسمیم:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty)$$

که در مجموعه W (اعداد صحیح نامنفی)؛ فاقد تنها $x = 0$ است.

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - تابع - تابع وارون و تابع مرکب) (متوسط)

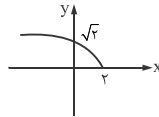
۱۵- گزینه «۳» - مطابق نمودار زیر در بازه $\{0\} - (-1, 1)$ ؛ نمودار تابع $f(x)$ پایین تر از نمودار تابع $g(x)$ قرار می گیرد. بنابراین $0 = -1 + 1 - a + b + c$ خواهد بود.



$$x^2 = |x| \Rightarrow x = \pm 1, 0$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع - چند جمله ای) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» - با توجه به نمودارهای این توابع در گزینه چهارم تابعی اکیداً نزولی خواهیم داشت:

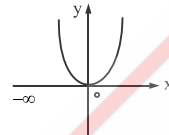


$$k(x) = \sqrt{2-x}$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow D_f = x \leq 2$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - تابع - تابع اکیداً نزولی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^2 |x|$ که در بازه $x \in (-\infty, 0]$ اکیداً نزولی می‌باشد، دامنه تابع وارون همان برد تابع بوده و برابر است با:



$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 |x| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

در روش دیگر عوامل x^2 و $|x|$ مثبت بوده و $y \geq 0$ است.

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - تابع - وارون پذیری و یکنواپی اکید) (دشوار)

۱۸- گزینه «۱» - با توجه به دامنه $-1 < x < 1$ و وارون پذیری تابع $f(x)$ ؛ برای تعیین ضابطه تابع وارون ابتدا x را یافته و سپس جای آن را با y عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2(1-x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 - y^2x^2 = x^2$$

$$y^2x^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow x^2(y^2+1) = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2+1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

می‌توانستیم از تعریف تابع وارون کمک بگیریم به طوری که اگر نقطه $A(x, y)$ واقع بر

تابع f باشد نقطه متناظر آن یعنی $A'(y, x)$ واقع بر f^{-1} است، مانند نقطه $A(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

که واقع بر f و نقطه $A'(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ در گزینه «۱» صدق می‌کند.

(حتمی) (پایه دوازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» - با استفاده از دامنه تعریف تابع مرکب $(g \circ f)(x)$ داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad D_f = x \geq 2, D_g = x \leq 2$$

$$x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \leq 2$$

$$x-2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 6 \xrightarrow{\cap} D_{g \circ f} = [2, 6]$$

و طول بازه $b-a=4$ واحد خواهد بود. (حتمی) (پایه دوازدهم - تابع - تابع مرکب) (متوسط)

۲۰- گزینه «۲» - نمودار خط $f(x)$ با داشتن مختصات نقاط $(2, 0)$ ، $(0, -3)$ ، برابر است با:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-0}{0-2} = \frac{3}{2}, (2, 0) \Rightarrow y-0 = \frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x-3$$

حال برای $f^{-1}(-2)$ داریم:

$$\frac{3}{2}x-3 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

و برای محاسبه $g(\frac{2}{3})$ با توجه به نیم‌خط سمت چپ نمودار تابع $g(x)$ با مختصات

نقاط $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ خواهیم داشت:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{0-1} = -1, (0, 2) \Rightarrow y-2 = -1(x-0) \Rightarrow g(x) = -x+2$$

$$\text{بنابراین } g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \text{ می‌باشد.}$$

(سرآسانی با تغییر) (پایه دوازدهم - تابع - توابع مرکب و وارون) (دشوار)

۲۱- گزینه «۴» - گزینه «۴» همواره درست می‌باشد. مثال نقض گزینه «۱»؛ تابع $y = \frac{1}{x}$ است.

در گزینه «۲»؛ تابع هم صعودی و هم نزولی یک تابع ثابت بوده و وارون‌پذیر نمی‌باشد.

در گزینه «۳» نمودار تابع یک‌به‌یک هر خط افقی را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(حتمی) (پایه دوازدهم و یازدهم - تابع - یکنواپی اکید، یک به یک و وارون‌پذیری) (متوسط)

۲۲- گزینه «۳» - به راحتی با انتخاب $a=0$ ضابطه تابع به $f(x) = 2x^3 + 1$ تبدیل می‌شود

که نموداری اکیداً صعودی خواهد داشت.

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - تابع - تابع درجه سوم و اکیداً صعودی) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» - ابتدا نمودار تابع $f(x)$ رو یک واحد در جهت مثبت محور طول‌ها انتقال

می‌دهیم و آن را $g(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + (x-1) + 1} = \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

سپس متحنی حاصل را نسبت به محور y ها قرینه می‌سازیم یعنی $g(-x)$ را به دست

می‌آوریم:

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - (-x) + 1} = \frac{1}{x^2 + x + 1} = f(x)$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - تابع - انتقال افقی) (متوسط)

۲۴- گزینه «۲» -

نمودار تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با انتقال افقی $x \Rightarrow x - \frac{b}{3a}$ به

نمودار $g(x) = x^3 + px + q$ تبدیل شده و جمله درجه دوم حذف خواهد شد. یعنی با

تبدیل $x \Rightarrow x+1$ که همان یک واحد در جهت منفی محور طول‌ها است.

(حتمی) (پایه یازدهم - تابع - انتقال افقی) (متوسط)

۲۵- گزینه «۴» - می‌دانیم:

$$-3 \leq 2x+1 \leq 7 \xrightarrow{-1} -4 \leq 2x \leq 6 \xrightarrow{+2} -2 \leq x \leq 3$$

با $a=-2$ ، $b=3$ و در نتیجه $a+b=1$ به جواب گزینه «۴» می‌رسیم.

(حتمی) (پایه دوازدهم - تابع - انتقال) (متوسط)