حسابان

۱- گزینه «۱» ـ

$$\frac{۱}{x^۲-۴}>۲ \Rightarrow \frac{۱}{x^۲-۴}-۲>۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲+۹}{x^۲-۴}>۰$$

$$\begin{cases} -۲x^۲+۹=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\pm۲/۰۰۰ \\ x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$$

	$-\sqrt{\frac{۹}{۲}}$		-۲		۲		$\sqrt{\frac{۹}{۲}}$	
−	○	+ ج	ت ن	−	ت ن	+ ج	○	−

می‌دانیم که در بازه $(-\sqrt{\frac{۹}{۲}}\,,-۲)\cup(۲\,,\sqrt{\frac{۹}{۲}})$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ تعیین علامت)

۲- گزینه «۳» ـ

$$f^۲(x)+f(x)-۶=۰ \Rightarrow (f(x)-۲)(f(x)+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=۲ \Rightarrow x=۴\,,x=۱\,,x=-۲ \\ f(x)=-۳ \Rightarrow x=-۴ \end{cases}$$

$$|x|-۱=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۴		-۲		-۱		۱		۴		$+\infty$
صورت		+	○	−	○	+		+	○	−	○	+	
مخرج		+		+		+	○	−	○	+		+	
A		+	○	− ج	○	+	ت ن	− ج	ت ن	− ج	○	+	

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ تعیین علامت)

۳- گزینه «۲» ـ ضابطه تابع g برابر است با: $g(x)=-۲x+۸$. توابع f و g در نقطه $x=\frac{-a}{۲}$ (رأس سهمی) با هم برخورد دارند. بنابراین:

$$f(\frac{-a}{۲})=g(\frac{-a}{۲}) \Rightarrow -\frac{a^۲}{۴}+۱۱=a+۸ \Rightarrow \frac{a^۲}{۴}+a-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \Rightarrow x_s=\frac{-a}{۲}=-۱ \text{ غ ق ق} \\ a=-۶ \Rightarrow x_s=\frac{-a}{۲}=۳ \text{ ق ق} \Rightarrow y_{min}=۲ \end{cases}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ سهمی)

۴- گزینه «۲» ـ سهمی بر خط $y=۲$ مماس است، پس عرض رأس سهمی برابر با ۲ است:

$$y_s=\frac{-\Delta}{۴a} \Rightarrow y_s=\frac{۴b-a^۲}{۴} \xrightarrow{y_s=۲} ۴b-a^۲=۸ \Rightarrow ۴b=a^۲+۸ \Rightarrow b=\frac{a^۲+۸}{۴}$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ سهمی)

۵- گزینه «۴» ـ β در معادله $۲x^۲+۳x-۱=۰$ صدق می‌کند. بنابراین:

$$۲\beta^۲+۳\beta-۱=۰ \Rightarrow (۲\beta^۲+۳\beta)=۱ \Rightarrow (۲\beta^۲+۳\beta)^۲=۱ \Rightarrow ۴\beta^۴+۱۲\beta^۳+۹\beta^۲=۱$$

α هم در معادله صدق می‌کند:

$$۲\alpha^۲+۳\alpha-۱=۰ \Rightarrow ۲\alpha^۲-۱=-۳\alpha$$

در نتیجه:

$$۴\beta^۴+۱۲\beta^۳+۹\beta^۲+۳\beta+۲\alpha^۲-۱=۱+۳\beta-۳\alpha=۱+۳(\beta-\alpha)=۱+۳(\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۲})=۱\pm\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}$$

توجه کنید که تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم)

۶- گزینه «۱» ـ

$$\text{مقدار نمک} = ۱۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۵ \text{ کیلوگرم}$$

۲ کیلوگرم به نمک و در نتیجه به آب نمک اضافه می‌شود، بنابراین ۷ کیلوگرم نمک و ۱۰۲ کیلوگرم آب نمک داریم. اگر x کیلوگرم از آب محلول کم شود، غلظت آن به ۸ درصد می‌رسد.

$$\frac{۷}{۱۰۲-x}=\frac{۸}{۱۰۰} \Rightarrow ۷۰۰=۸۱۶-۸x \Rightarrow x=۱۴/۵$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات شامل عبارات گویا)

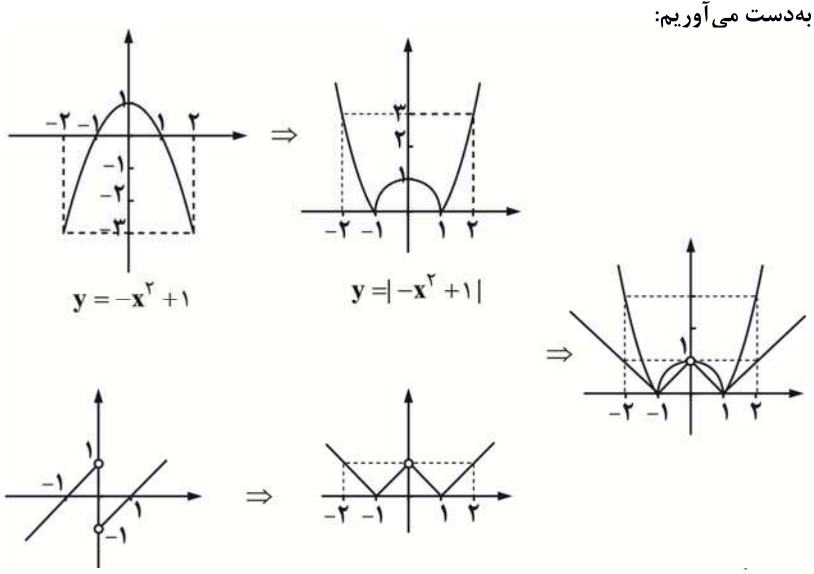
۷- گزینه «۳» ـ

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{(x-1)(x+3)}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} \Rightarrow \sqrt{x^2+2x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}}=2 \xrightarrow{u=\sqrt{x^2+2x-3}} u+\frac{1}{u}=2$$

$\Rightarrow \frac{u^2+1}{u}=2 \Rightarrow u^2-2u+1=0 \Rightarrow u=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x-3}=1 \Rightarrow x^2+2x-4=0 \xrightarrow{\Delta>0}$ ۲ جواب دارد

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات شامل عبارت‌های گنگ)

۸- گزینه «۲» ـ با رسم نمودار دو تابع تعداد جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$y=-x^2+1$ $\quad$ $y=|-x^2+1|$

$y=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x-1 & x>0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ $\quad$ $y=|x-\frac{x}{|x|}|$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ قدر مطلق)

۹- گزینه «۴» ـ با توجه به نمودار سهمی داریم:

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{دهانه سهمی رو به پایین است}} a<0 \quad (1)\\ \xrightarrow{\text{عرض از مبدا منفی است}} 1+a<0 \Rightarrow a<-1 \quad (2)\\ \xrightarrow{\text{معادله دارای ریشه نیست}} \Delta<0 \Rightarrow \Delta=9-4a-4a^2<0 \Rightarrow \Delta'=4+36=40 \Rightarrow a_1, a_2=\frac{2\pm 2\sqrt{10}}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}\end{cases}$$

a	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$
$-4a^2-4a+9$	$-$		$+$		$-$

$\Rightarrow a\in(-\infty, \frac{-1-\sqrt{10}}{2})\cup(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}, +\infty) \quad (3)$

$\xrightarrow{1\cap 2\cap 3} a\in(-\infty, \frac{-1-\sqrt{10}}{2})$

از آن‌جا که: $3 \simeq \sqrt{10}$، پس. $\frac{-1-\sqrt{10}}{2} \simeq -2$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه «۴» قابل قبول است زیرا:

$a=-3/3\in(-\infty, \frac{-1-\sqrt{10}}{2})$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ سهمی/ پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ معادلات درجه ۲)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$|-x^2+6x+7|=x^2-6x-7=-(-x^2+6x+7)$

با توجه به تعریف قدرمطلق $y=|x|=\begin{cases}x & x>0\\ -x & x\le 0\end{cases}$، پس باید:

$-x^2+6x+7\le 0$

$-x^2+6x+7=0 \Rightarrow x=-1, 7 \Rightarrow$

	$-\infty$	-1		7	$+\infty$
	$-$	ج	$+$	ج	$-$

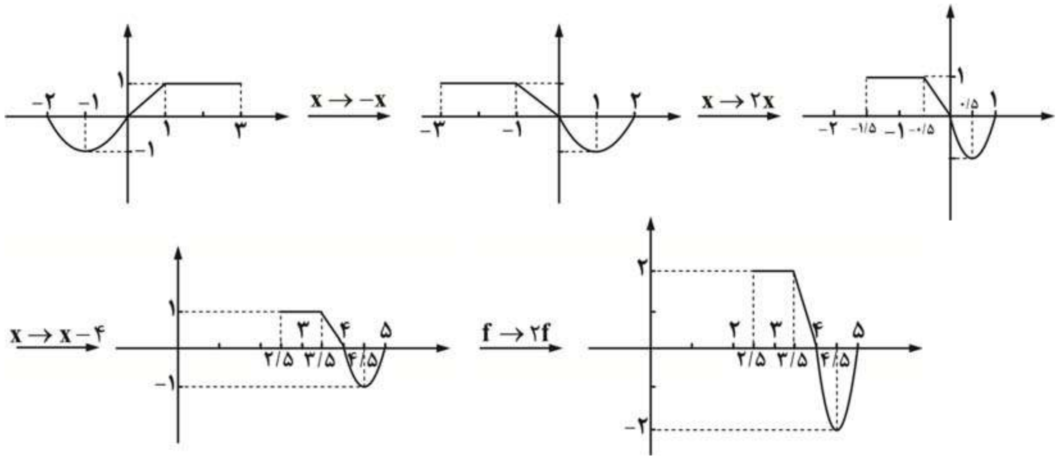
در نتیجه مقادیر $(-\infty, -1]\cup[7, +\infty)$ در معادله صدق می‌کند و مقادیر $(-1, 7)$ در معادله صدق نمی‌کند. یعنی ۷ مقدار صحیح در معادله صدق نمی‌کند. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس چهارم ـ معادلات قدر مطلقی)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$\begin{cases} -2 \le \dfrac{x}{3} - 1 \le -1 \Rightarrow -3 \le x \le 0 \\ 0 < \dfrac{x}{3} - 1 \le 1 \Rightarrow 3 < x \le 6 \end{cases}$$

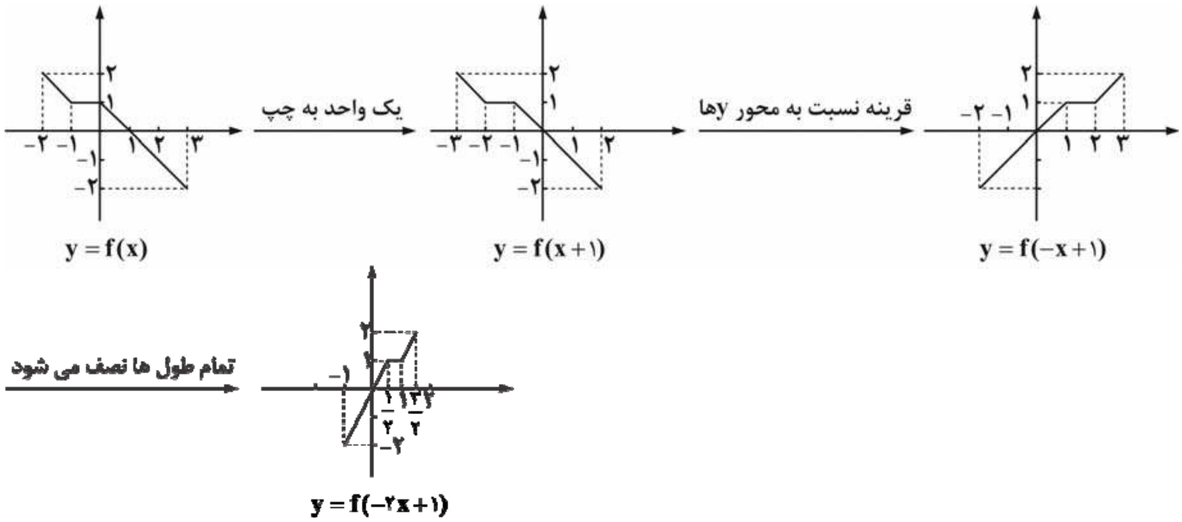
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل نمودار توابع)

۱۲- گزینه «۳» ـ



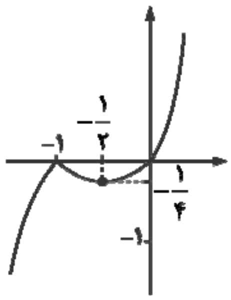
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل نمودار تابع)

۱۳- گزینه «۲» ـ



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل نمودار توابع)

۱۴- گزینه «۴» ـ



$$y = x|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & x \ge -1 \\ -x(x+1) & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & x \ge -1 \\ -(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & x < -1 \end{cases}$$

باتوجه به نمودار رسم شده تابع y در بازه $(-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$g(x) = x^2 \xrightarrow{x \ge 0} g^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}of(x) = \sqrt{[x] - x}$$

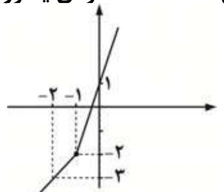
با توجه به این‌که:

$$[x] - x = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < \text{عددی} < 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین دامنه $g^{-1}of$ برابر است با $x \in \mathbb{Z}$ و مقدار $g^{-1}of$ همواره برابر صفر خواهد بود. پس تابع $y = 2^{g^{-1}of(x)} = 2^0 = 1$ یک تابع ثابت است. یعنی روی دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۶- گزینه «۳» ـ نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به‌طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

$$f(x)=۲x+|x+۱|=\begin{cases}۳x+۱ & x\ge -۱\\ x-۱ & x<-۱\end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینیم شیب هر دو ضابطه نمودار تابع f مثبت و در نتیجه اکیدا صعودی است. هم‌چنین می‌دانیم تابع $g(x)=x^۲$ به ازای $x\le ۰$ اکیداً نزولی است. بنابراین طبق نکته تابع $y=(۲x+|x+۱|)^۲$ به‌ازای x هایی که $۲x+|x+۱|\le ۰$ هستند، اکیداً نزولی خواهد بود.

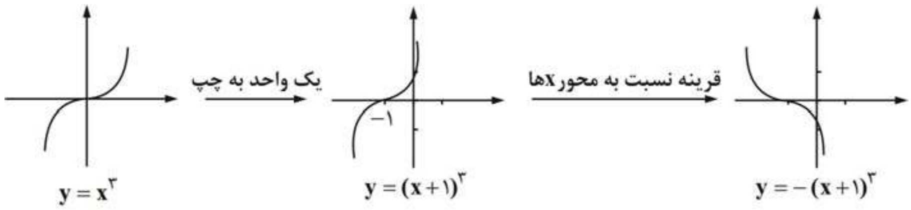
$$۲x+|x+۱|=۰ \Rightarrow \begin{cases}۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \text{ ق ق}\\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ غ ق ق}\end{cases} \Rightarrow$$

		$-\frac{۱}{۳}$	
$۳x+۱$	$-$	۰	$+$
	ج	ج	

$\Rightarrow x\in(-\infty,-\frac{۱}{۳}]$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۷- گزینه «۱» ـ



$$\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} y=-(-x+۱)^۳ \Rightarrow y=(x-۱)^۳ \xrightarrow[f\to f^{-۱}]{\text{قرینه نسبت به y=x}} \sqrt[۳]{y}+۱=x$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y=-\sqrt[۳]{x}-۱$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تابع درجه سوم)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$x^۳+۲x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۳=۱-۲x^۲$$

$$\underbrace{x^۵}_{x^۲x^۳}+\underbrace{ax^۴}_{axx^۳}-x^۳+bx^۲+۱=x^۲(۱-۲x^۲)+ax(۱-۲x^۲)-(۱-۲x^۲)+bx^۲+۱=x^۲\underbrace{-۲x^۴}_{-۲xx^۳}+ax-۲ax^۳-۱+۲x^۲+bx^۲+۱$$

$$=x^۲-۲x+\underbrace{۴x^۳}_{۴(۱-۲x^۲)}+ax-۲a+۴ax^۲+۲x^۲+bx^۲=(-۵+۴a+b)x^۲+(a-۲)x+۴-۲a$$

باقی‌مانده تقسیم صفر است، بنابراین:

$$\begin{cases}۴-۲a=۰ \Rightarrow a=۲\\ a-۲=۰ \Rightarrow a=۲\\ -۵+۴a+b=۰ \Rightarrow b=-۳\end{cases} \Rightarrow a+b=-۱$$

(مشابه کنکور سراسری خارج از کشور ـ ۹۴) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تقسیم و بخش‌پذیری)

۱۹- گزینه «۳» ـ باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ برابر است با $f(-۱)$. برای به‌دست آوردن $f(-۱)$ کافی است در رابطه:

$$-f(x-۲)=(x^۲-۱)Q(x)+۲x-۱۰$$

به جای x قرار دهیم ۱ دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{x=۱} -f(-۱)=\underbrace{\underbrace{(۱-۱)}_{۰}Q(۱)}_{۰}+\underbrace{۲-۱۰}_{-۸} \Rightarrow f(-۱)=۸$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تقسیم و بخش‌پذیری)

۲۰- گزینه «۱» ـ با توجه به نکته گفته شده در سوال ۱۶، از آن‌جا که $f(-۲x+۱)$ و $y=-۲x+۱$ توابعی اکیداً نزولی هستند، تابع f باید اکیداً صعودی باشد. مجدداً طبق همان نکته چون f و $y=x-۱$ اکیداً صعودی هستند، تابع $f(x-۱)$ اکیداً صعودی خواهد بود.

$$\begin{cases}۱-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm۱\\ f(x-۱)=۰ \xrightarrow{f(-۱)=۰} x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow x<۰ \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f(x-۱)} f(x-۱)<f(-۱)=۰ \Rightarrow x<۰ \Rightarrow f(x-۱)<۰\end{cases}$$

	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
$f(x-۱)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$۱-x^۲$	$-$	$+$	$+$	$-$	
y	$+$ ج	$-$ ن	$+$ ج	$-$ ن	

$$D_y=(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$$

بنابراین دامنه تابع y شامل هیچ صحیح مثبتی نیست. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ توابع صعودی و نزولی)