حسابان

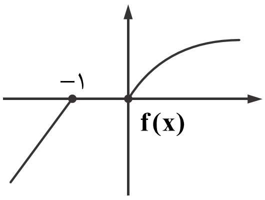
۱- گزینه «۳» ـ نمودار داده شده از تبدیل تابع $x^۳$ به‌دست آمده است. چون مرکز تقارن $(۲ , ۲)$ است پس تابع را به‌صورت $y = a(x-۲)^۳ + ۲$ در نظر می‌گیریم. تابع از مبدأ عبور کرده است.

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow -۸a + ۲ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

پس تابع موردنظر به‌صورت $y = \frac{۱}{۴}(x-۲)^۳ + ۲$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل تابع)

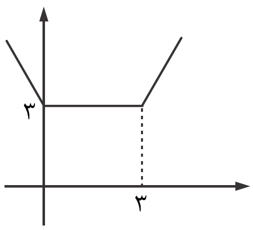
۲- گزینه «۱» ـ چون تابع $\log x$ صعودی اکید است پس تابع $۳ + \log x$ نیز صعودی اکید خواهد بود. ضمناً $۲ - \sqrt{x}$ و $-۲x^۳ + ۱$ نزولی اکید و تابع $x^۲ - ۴x$ غیر یکنواست. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۳- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که $f(x)$ صعودی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۴- گزینه «۲» ـ نمودار $f(x)$ گلدانی‌شکل است.



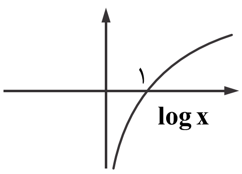
این تابع در فاصله $[۰ , ۳]$ ثابت است، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر ۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

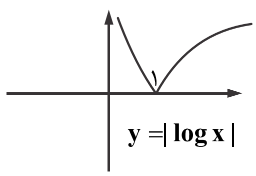
۵- گزینه «۳» ـ

$$R_{f(\frac{x}{۲})} = R_{f(x)} = R_{f(۱-x)} = [-۱ , ۲) \Rightarrow R_{۲f(۱-x)+۱} = [۲(-۱)+۱ , ۲(۲)+۱) = [-۱ , ۵)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل توابع)

۶- گزینه «۴» ـ



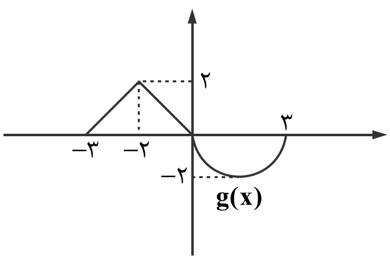


تابع $|\log x|$ در بازه $(۰ , ۱]$ نزولی اکید و در بازه $[۱ , +\infty)$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۷- گزینه «۳» ـ مراحل رسم تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x) \to f(-x) \to ۲f(-x)$$

اگر نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه و سپس برد آن را دو برابر کنیم، نمودار تابع $g(x)$ به‌دست می‌آید.



تابع $g(x)$ از نواحی دوم و چهارم عبور می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۸- گزینه «۳» ـ دامنه $f(x)$ برابر $[-1\,,3]$ است. پس دامنه تابع $f(2x)$ برابر $[-\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}]$ است. دامنه تابع $g(x)$ برابر $[-2\,,4]$ است پس دامنه تابع $g(x-1)$ برابر $[-1\,,5]$ است.

$$f(x+1)=0 \Rightarrow x+1=2 \Rightarrow x=1$$

$$D_g=[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\cap[-1\,,5]-\{1\}=[-\frac{1}{2},1)\cup(1\,,\frac{3}{2}]$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل توابع)

۹- گزینه «۳» ـ چون تابع f صعودی اکید است پس از رابطه داده شده نتیجه می‌شود که:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\geq\frac{4x}{3} \Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x\geq 0 \Rightarrow \frac{3-x-4x^2}{3x}\geq 0$$

$$-4x^2-x+3=0 \Rightarrow x=-1,\frac{3}{4}$$

x		-1		0		$\frac{3}{4}$	
p	+	0	−	ت ن	+	0	−

$$p\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty\,,-1]\cup(0\,,\frac{3}{4}]$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یکنوایی توابع)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$$f(2)=3 \Rightarrow 8+6-k=3 \Rightarrow k=11$$

$$f(x)=x^3+3x-11$$

$$g(x)=kf(2x)+f(3x-1)$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$g(1)=kf(2)+f(2)=12f(2)=12\times 3=36$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تقسیم و بخش‌پذیری)

۱۱- گزینه «۴» ـ با فرض $\frac{1}{x}=t$ داریم:

$$\sqrt{t+8}+\sqrt{t+1}=\sqrt{2t}+3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} t+8+t+1+2\sqrt{t^2+9t+8}=2t+9+6\sqrt{2t}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{t^2+9t+8}=6\sqrt{2t} \xrightarrow{\div 2} \sqrt{t^2+9t+8}=3\sqrt{2t} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2+9t+8=9(2t) \Rightarrow t^2-9t+8=0 \Rightarrow \begin{cases} t=8 \\ t=1 \end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست آمده قابل قبول است.

$$t=8 \Rightarrow \frac{1}{x}=8 \Rightarrow x=\frac{1}{8}$$

$$t=1 \Rightarrow \frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$$

مجموع جواب‌ها $\frac{9}{8}$ است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ معادله گنگ)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$|3x-1|<|x+1| \Rightarrow (3x-1-x-1)(3x-1+x+1)<0 \Rightarrow (2x-2)(4x)<0 \Rightarrow 0<x<1 \quad (1)$$

$$x^2+x-6\leq 0 \Rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 2 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر $(0\,,1)$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ نامعادله)

۱۳- گزینه «۱» ـ چون α ریشه معادله است پس:

$$\alpha^{2} - 6\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^{2} = 6\alpha + 1$$

$$A = (\alpha^{2} - 6\alpha + 1)(\alpha^{2} + 6\beta + 1)$$

$$A = (1+1)(6\alpha + 1 + 6\beta + 1) = 2(2 + 6(\alpha + \beta))$$

$$\Rightarrow A = 2(2 + 6 \times \frac{-b}{a}) = 2(2 + 6 \times 6) = 2 \times 38 = 76$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ روابط بین ریشه‌ها)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$mx^{2} - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ریشه مضاعف} = \frac{3}{2m} = \frac{3}{2(-\frac{9}{4})} = \frac{3}{-\frac{9}{2}} = -\frac{3 \times 2}{9} = -\frac{2}{3}$$

نسبت ریشه مضاعف به m برابر است با:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{9}{4}} = \frac{8}{27}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله درجه دوم)

۱۵- گزینه «۱» ـ مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است، فاصله این نقطه از خط $y = 1$ برابر $|1 + \frac{\Delta}{4a}|$ است.

$$|1 + \frac{\Delta}{4a}| = |1 + \frac{36 - 4(1)(k+1)}{4 \times 1}| = |1 + 9 - (k+1)| = 10 \Rightarrow |10 - (k+1)| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 10 - (k+1) = 10 \Rightarrow k + 1 = 0 \\ 10 - (k+1) = -10 \Rightarrow k + 1 = 20 \end{cases}$$

$C = k + 1 = 0$ یا ۲۰

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ سهمی)

۱۶- گزینه «۲» ـ محلول در ابتدا $(200 \times \frac{10}{100} = 20)$ لیتر رنگ و الباقی آن که ۱۸۰ لیتر است آب دارد. حال به محلول ۱۰ لیتر رنگ اضافه مـی‌کنـیم. محتویات آن ۳۰ لیتر رنگ و ۱۸۰ لیتر آب خواهد شد. حال اگر x لیتر آب تبخیر شود غلظت رنگ به‌صورت زیر است:

$$\frac{30}{210 - x} = \frac{15}{100} \Rightarrow 210 - x = 200 \Rightarrow x = 10$$

یعنی اگر ۱۰ لیتر آب اضافه کنیم، غلظت ۱۵ درصدی خواهیم داشت. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ معادله گویا)