

حسابان

۱- گزینه «۱» -

$$-6 \leq g(x) \leq 4 \Rightarrow -6 \leq 3 + 2f(1-x) \leq 4 \xrightarrow{-3} -9 \leq 2f(1-x) \leq 1 \xrightarrow{\div 2} -\frac{9}{2} \leq f(1-x) \leq \frac{1}{2}$$

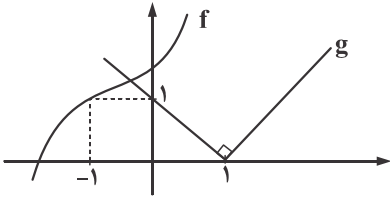
$$\Rightarrow -\frac{9}{2} \leq f(1+x) \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -\frac{27}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع) (متوسط)

۲- گزینه «۲» - f را به مکعب کامل تبدیل می کنیم:

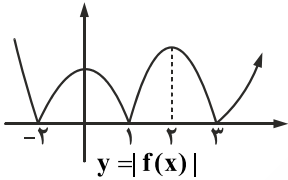
$$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 = (x+1)^3 + 1$$

مرکز تقارن تابع f برابر (1, -1) است.



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع اند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع) (متوسط)

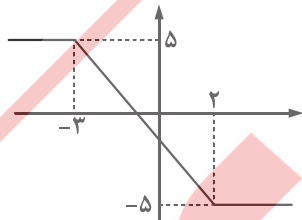
۳- گزینه «۳» - قسمت های زیر محور xها را به بالای محور xها متقارن می کنیم:



با توجه به نمودار |f(x)| در بازه های [0, -2], [1, 2], و [3, +∞) صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - |f(x)|) (متوسط)

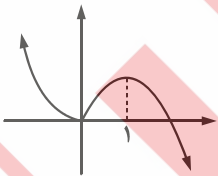
۴- گزینه «۴» - این تابع سرسره ای است.

x	2	-3
y	-5	5



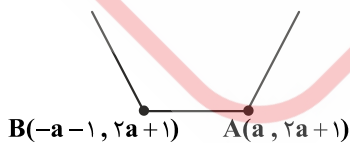
همان طور که ملاحظه می کنید هیچ بازه ای یافت نمی شود که در آن تابع f صعودی اکید باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (آسان)

۵- گزینه «۳» - نمودار تابع را رسم می کنیم:



تابع مورد نظر در بازه [0, 1] صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - تابع مورد نظر گلدانی شکل است. چون a > 0 است، پس نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به اطلاعات سؤال تابع در فاصله [-a-1, a] ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

$$-a-1 = -6 \Rightarrow a = 5$$

$$b = a = 5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (دشوار)

۷- گزینه «۱» -

$$f(2) = 2 \Rightarrow 1 + 2a + b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{f(2x)} f(-2) = 4 \Rightarrow -1 - 2a + b = 4 \Rightarrow -2a + b = 5$$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = 6 \Rightarrow b = 3, a = -1$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1)f(2) = (1 + a + b)(2) = (1 + 3 - 1)(2) = 4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تقسیم) (متوسط)

۸- گزینه «۳» -

$$f(2x+1) > f(3x^2) \xrightarrow{f \text{ صعودی اکید}} 2x+1 > 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 4x + a = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = 2 - a$$

$2 - a$ صفر مشترک دو تابع است.

$$(2-a)^2 + 3(2-a) + 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 4 \end{cases}$$

مجموع مقادیر به دست آمده ۷ است. (نصیری) (پایه دهم - سهمی) (دشوار)

۱۰- گزینه «۲» - عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است و همچنین با شرط $x > \frac{7}{3}$ عبارت‌های $3x - 7$ و $\sqrt{x} - 1$ نیز مثبت‌اند، پس نامعادله داده شده

به صورت زیر خواهد بود:

$$(x-3)^2 < 0 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{\cap(x > \frac{7}{3})} x \in (\frac{7}{3}, 3) \Rightarrow a \times b = \frac{7}{3} \times 3 = 7$$

(نصیری) (پایه دهم - نامعادله) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -b \\ \alpha^2\beta^2 = c \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow -b = 1 - 2(-1)(1) = 4 \Rightarrow b = -4$$

$$\alpha^2\beta^2 = c \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = c \Rightarrow (-1)^2 = c \Rightarrow c = 1$$

$$b + c = -4 + 1 = -3$$

(نصیری) (پایه یازدهم - روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - به رابطه زیر توجه کنید:

$$a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$$

به کمک این رابطه متوجه می‌شویم که:

$$\frac{2\sqrt{4x-1}-x}{\sqrt{4x-1}+x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{4x-1}-x = \sqrt{4x-1}+x \Rightarrow \sqrt{4x-1} = 2x \Rightarrow 4x-1 = 4x^2 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 = 1$$

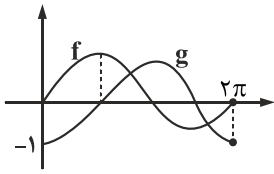
(نصیری) (پایه یازدهم - معادله گنگ و گویا) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» - طبق نتیجه نامساوی مثلثی مسئله را حل می‌کنیم:

$$|\frac{4x-1}{a}| + |\frac{x-2}{b}| > |\frac{4x-4}{a+b}| \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow (4x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{1, 2\}$$

پس دو عدد صحیح در نامعادله فوق صدق می‌کند. (نصیری) (پایه یازدهم - قدرمطلق - نامساوی و مثلثی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» - نمودار $g(x)$ از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در راستای محور x ها به سمت راست رسم می‌شود.



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - انتقال) (آسان)

گزینه «۳» -

$$y = 3f\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 \xrightarrow{(-1,0)} 0 = 3f(-1) - 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{3}$$

$$2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - f(-1) = 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \in g$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل تابع) (متوسط)

گزینه «۳» -

$$f(x) \rightarrow f(x-2) \Rightarrow f(x-2) - 1$$

$$g(x) = f(x-2) - 1 = (x-2)^2 - (x-2) - 1 - 1 = x^2 - 5x + 4$$

$$g(x) = f(2x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (2x)^2 - (2x) - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 4x^2 - 2x - 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

پس در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل تابع) (آسان)

گزینه «۱» - رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + 2x + 1$$

$$p(-2) = 0 + 2(-2) + 1 = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تقسیم) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» - با توجه به این که $4a + 2b + c < 0$ است، پس $f(2) < 0$ است، از طرفی چون $b^2 < 4ac$ است، در نتیجه $b^2 - 4ac < 0$ و نهایتاً $\Delta < 0$ خواهد بود، پس سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند و دهانه آن رو به پایین است و در نتیجه $a < 0$ و $c < 0$ خواهد بود.

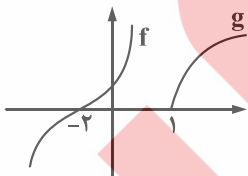
$$a < 0, c < 0 \Rightarrow ac > 0$$

(نصیری) (پایه یازدهم - سهمی) (دشوار)

گزینه «۱» -

$$x^2 + 6x^2 + 12x + 8 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (x+2)^2 = \sqrt{x-1}$$

حال دو تابع $f(x) = (x+2)^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را رسم می‌کنیم.



دو تابع برخوردی ندارند، پس معادله فوق ریشه حقیقی ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - تبدیل تابع) (آسان)

گزینه «۳» - حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

الف) اگر a, b و c هم‌علامت باشند، $A = 3$ یا $A = -3$ است.

ب) اگر دو تا مثبت و یکی منفی باشند $A = 1$ و اگر دو تا منفی و یکی مثبت باشند $A = -1$ است.

پس در کل چهار مقدار متفاوت برای A به دست می‌آید. (نصیری) (پایه یازدهم - معادلات - قدرمطلق) (متوسط)