حسابان

۱- گزینه «۱» ـ

$$-۶ \le g(x) \le ۴ \Rightarrow -۶ \le ۳+۲f(۱-x) \le ۴ \xrightarrow{-۳} -۹ \le ۲f(۱-x) \le ۱ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۹}{۲} \le f(۱-x) \le \frac{۱}{۲}$$

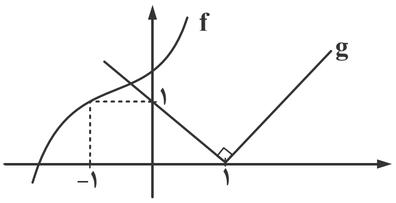
$$\Rightarrow -\frac{۹}{۲} \le f(۱+x) \le \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۳} -\frac{۲۷}{۲} \le h(x) \le \frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ـ f را به مکعب کامل تبدیل می‌کنیم:

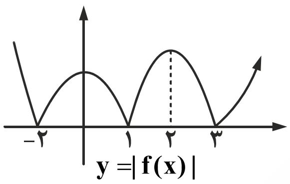
$$f(x) = (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱) + ۱ = (x+۱)^۳ + ۱$$

مرکز تقارن تابع f برابر $(-۱, ۱)$ است.



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

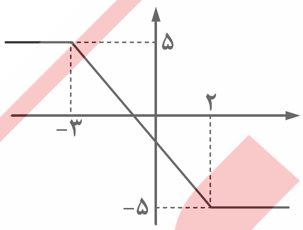
۳- گزینه «۳» ـ قسمت‌های زیر محور xها را به بالای محور xها متقارن می‌کنیم:



با توجه به نمودار $|f(x)|$ در بازه‌های $[-۲, ۰]$، $[۱, ۲]$ و $[۳, +\infty)$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ $|f(x)|$) (متوسط)

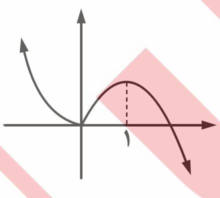
۴- گزینه «۴» ـ این تابع سرسره‌ای است.

x	۲	-۳
y	-۵	۵



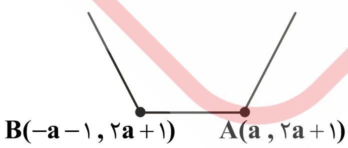
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هیچ بازه‌ای یافت نمی‌شود که در آن تابع f صعودی اکید باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (آسان)

۵- گزینه «۳» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع موردنظر در بازه $[۰, ۱]$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ تابع موردنظر گلدانی شکل است. چون $a > ۰$ است، پس نمودار تقریبی به‌صورت زیر است:



با توجه به اطلاعات سؤال تابع در فاصله $[-a-۱, a]$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

$$-a-۱ = -۶ \Rightarrow a = ۵$$

$$b = a = ۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (دشوار)

۷- گزینه «۱» ـ

$$f(2)=2 \Rightarrow 8+2a+b=2 \Rightarrow 2a+b=-6$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{f(2x)} f(-2)=4 \Rightarrow -8-2a+b=4 \Rightarrow -2a+b=12$$

$$\begin{cases}2a+b=-6\\ -2a+b=12\end{cases} \xrightarrow{+} 2b=6 \Rightarrow b=3\,,\,a=-\frac{9}{2}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$f(1)f(2)=(1+a+b)(2)=(1+3-\frac{9}{2})(2)=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تقسیم) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ـ

$$f(2x+1)>f(3x^2) \xrightarrow{\text{f صعودی اکید}} 2x+1>3x^2 \Rightarrow 3x^2-2x-1<0 \Rightarrow -\frac{1}{3}<x<1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۹- گزینه «۳» ـ دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2+4x+a=x^2+3x+2 \Rightarrow x=2-a$$

$2-a$ صفر مشترک دو تابع است.

$$(2-a)^2+3(2-a)+2=0 \Rightarrow a^2-7a+12=0 \Rightarrow \begin{cases}a=3\\ a=4\end{cases}$$

مجموع مقادیر به‌دست آمده ۷ است. (نصیری) (پایه دهم ـ سهمی) (دشوار)

۱۰- گزینه «۲» ـ عبارت x^2+1 همواره مثبت است و همچنین با شرط $x>\frac{7}{3}$ عبارت‌های $3x-7$ و $\sqrt{x}-1$ نیز مثبت‌اند، پس نامعادله داده شده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(x-3)^3<0 \Rightarrow x-3<0 \Rightarrow x<3 \xrightarrow{\cap(x>\frac{7}{3})} x\in(\frac{7}{3},3) \Rightarrow a\times b=\frac{7}{3}\times 3=7$$

(نصیری) (پایه دهم ـ نامعادله) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

$$x^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-b\\ \alpha^3\beta^3=c\end{cases}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \Rightarrow -b=1-3(-1)(1)=4 \Rightarrow b=-4$$

$$\alpha^3\beta^3=c \Rightarrow (\alpha\beta)^3=c \Rightarrow (-1)^3=c \Rightarrow c=-1$$

$$b+c=-4-1=-5$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» ـ به رابطه زیر توجه کنید:

$$a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow a=1$$

به کمک این رابطه متوجه می‌شویم که:

$$\frac{2\sqrt{4x-1}-x}{\sqrt{4x-1}+x}=1 \Rightarrow 2\sqrt{4x-1}-x=\sqrt{4x-1}+x \Rightarrow \sqrt{4x-1}=2x \Rightarrow 4x-1=4x^2 \Rightarrow (2x-1)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2=1$$

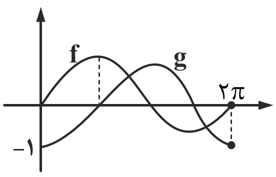
(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادله گنگ و گویا) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ طبق نتیجه نامساوی مثلثی مسئله را حل می‌کنیم:

$$|\underbrace{4x-1}_{a}|+|\underbrace{x-3}_{b}|>|\underbrace{5x-4}_{a+b}| \Rightarrow ab<0 \Rightarrow (4x-1)(x-3)<0 \Rightarrow \frac{1}{4}<x<3 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{1,2\}$$

پس دو عدد صحیح در نامعادله فوق صدق می‌کند. (نصیری) (پایه یازدهم ـ قدرمطلق ـ نامساوی و مثلثی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» ـ نمودار $g(x)$ از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ در راستای محور xها به سمت راست رسم می‌شود.



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ انتقال) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$y = ۳f(\frac{x-۱}{۲}) - ۱ \xrightarrow{(-۱,\circ)} \circ = ۳f(-۱) - ۱ \Rightarrow f(-۱) = \frac{۱}{۳}$$

$$۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(-\frac{۱}{۲}) = ۲ - f(-۱) = ۲ - \frac{۱}{۳} \Rightarrow g(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۳} \Rightarrow (-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۳}) \in g$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$f(x) \to f(x-۲) \Rightarrow f(x-۲) - ۱$$

$$g(x) = f(x-۲) - ۱ = (x-۲)^۲ - (x-۲) - ۱ - ۱ = x^۲ - ۵x + ۴$$

$$g(x) = f(۲x) \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = (۲x)^۲ - (۲x) - ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۴x^۲ - ۲x - ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۳x - ۵ = \circ \Rightarrow \Delta > \circ$$

پس در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع) (آسان)

۱۷- گزینه «۱» ـ رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x) = (x^۲ + x - ۲)q(x) + ۲x + ۱$$

$$p(-۲) = \circ + ۲(-۲) + ۱ = -۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تقسیم) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» ـ با توجه به این‌که $۴a + ۲b + c < \circ$ است، پس $f(۲) < \circ$ است، از طرفی چون $b^۲ < ۴ac$ است، در نتیجه $b^۲ - ۴ac < \circ$ و نهایتاً $\Delta < \circ$ خواهد بود، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند و دهانه آن رو به پایین است و در نتیجه $a < \circ$ و $c < \circ$ خواهد بود.

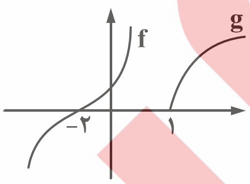
$$a < \circ , c < \circ \Rightarrow ac > \circ$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ سهمی) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸ = \sqrt{x-۱} \Rightarrow (x+۲)^۳ = \sqrt{x-۱}$$

حال دو تابع $f(x) = (x+۲)^۳$ و $g(x) = \sqrt{x-۱}$ را رسم می‌کنیم.



دو تابع برخوردی ندارند، پس معادله فوق ریشه حقیقی ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» ـ حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

الف) اگر a، b و c هم‌علامت باشند، $A = ۳$ یا $A = -۳$ است.

ب) اگر دو تا مثبت و یکی منفی باشند $A = ۱$ و اگر دو تا منفی و یکی مثبت باشند $A = -۱$ است.

پس در کل چهار مقدار متفاوت برای A به‌دست می‌آید. (نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ قدرمطلق) (متوسط)