هندسه ۳

۱- گزینه «۱» ـ چون $a_{ij} = i^{3} + j^{3} + ij$، پس به‌ازای هر i و j داریم:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

پس درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های پایین قطر اصلی نظیر به نظیر باهم برابرند. در نتیجه $x = y$ یعنی $\frac{x}{y} = ۱$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ مقدماتِ ماتریس)

۲- گزینه «۳» ـ از برابری $۲A - B = I$ به‌دست می‌آید:

$$B = ۲A - I = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$۲ = ۱ - ۴ - ۱ + ۴ + ۲ - ۱ = \text{مجموع درایه‌های ماتریس } B$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ مقدمات ماتریس)

۳- گزینه «۳» ـ با فرض $a_{ij} = i - j$ و $b_{ij} = ۲i + j$ به‌دست می‌آید:

$$C_{۳۲} = (\text{سطر سوم ماتریس } A)(\text{ستون دوم ماتریس } B)$$

$$= [a_{۳۱} \quad a_{۳۲}]\begin{bmatrix} b_{۱۲} \\ b_{۲۲} \end{bmatrix} = [۲ \quad ۱]\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = ۸ + ۶ = ۱۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس)

۴- گزینه «۱» ـ از تعریف ماتریس A به‌دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

می‌نویسیم:

$$AB = \begin{bmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ ۲(a+d+g) & ۲(b+e+h) & ۲(c+f+i) \\ ۳(a+d+g) & ۳(b+e+h) & ۳(c+f+i) \end{bmatrix}$$

بنابر فرض مسئله مجموع درایه‌های AB برابر ۴۲ است. مجموع درایه‌های ستون دوم B را x فرض می‌کنیم. اکنون باتوجه به این‌که مجموع درایه‌های ستون اول و سوم ماتریس B برابر ۵ است به‌دست می‌آید:

$$۶ \times ۵ + ۶x = ۴۲$$

در نتیجه $x = ۲$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۵- گزینه «۲» ـ برابری $A^{۳} = A$ را در $A^{-۱}$ و برابری $B^{۳} = B$ را در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید.

$$A^{۲} = I, B^{۲} = I$$

می‌نویسیم:

$$(۳A^{۲} - B^{۲})^{-۱} = (۳I - I)^{-۱} = (۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}I^{-۱} = \frac{۱}{۲}I$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس‌ها)

۶- گزینه «۴» ـ می‌دانیم $A = (A^{-۱})^{-۱}$. پس:

$$A = \frac{۱}{۸-۶}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -\frac{۳}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$۲A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۷- گزینه «۲» ـ چون ماتریس داده شده وارون‌پذیر نیست، پس:

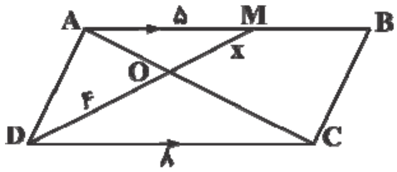
$$۲a - ۴ = ۰$$

یعنی $a = ۲$. دستگاهِ داده شده به‌شکل زیر است:

$$\begin{cases} ۲x - y = ۷ \\ ۳x + ۲y = ۰ \end{cases}$$

از حل این دستگاه به‌دست می‌آید $y = -۳$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

۸- گزینه «۴» ـ باتوجه به شکل و بنابر قضیه اساسی تشابه دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}M$ و $O\overset{\Delta}{C}D$ متشابه هستند. با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:



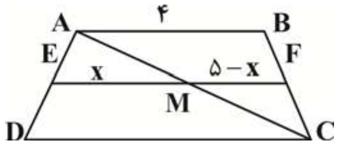
$$\frac{OM}{OD}=\frac{AM}{CD} \Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{۵}{۸}$$

یعنی:

$$x=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قضیه اساسی تشابه)

۹- گزینه «۳» ـ روش اول: طبق قضیه تالس در ذوزنقه داریم:



$$\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$$

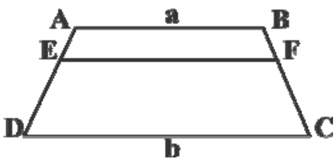
در نتیجه:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{BF}{BC-BF}=\frac{۱}{۴-۱} \Rightarrow \frac{BF}{CF}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{CF}{BF}=\frac{۳}{۱} \Rightarrow \frac{CF}{CF+BF}=\frac{۳}{۳+۱} \Rightarrow \frac{CF}{BC}=\frac{۳}{۴}$$

$$A\overset{\Delta}{B}C: MF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{BC}=\frac{MF}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۵-x}{۴} \Rightarrow ۵-x=۳ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow EM=۲$$

$$A\overset{\Delta}{D}C: EM \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{EM}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۲}{DC} \Rightarrow DC=۸$$

روش دوم: نکته: با توجه به شکل اگر EF موازی قاعده‌ها باشد و $\frac{AE}{ED}=\frac{m}{n}$ ، به‌دست می‌آید.



$$EF=\frac{n\cdot a+m\cdot b}{m+n}$$

اکنون بنا برفرض $\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه:

$$EF=\frac{۳AB+CD}{۳+۱} \Rightarrow ۵=\frac{۳\times۴+CD}{۴}$$

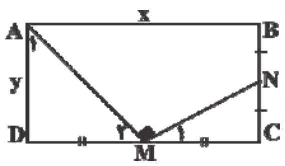
یعنی $CD=۸$. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس در ذوزنقه)

۱۰- گزینه «۲» ـ چون $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{۱}{۳}$ و $\hat{A}=\hat{A}$ ، پس دو مثلث AMN و ACB متشابه هستند. با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۳}{BC}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $BC=۹$. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه)

۱۱- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم:



$$\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ \text{ و } \hat{A}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ$$

در نتیجه:

$$\hat{A}_۱=\hat{M}_۱$$

بنابراین $\Delta ADM \sim \Delta MNC$. با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید.

$$\frac{NC}{DM}=\frac{MC}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{y}{۲}}{\frac{x}{۲}}=\frac{\frac{x}{۲}}{y}$$

یعنی $\frac{x^۲}{y^۲}=۲$ پس:

$$\frac{\text{طول مستطیل}}{\text{عرض مستطیل}}=\frac{x}{y}=\sqrt{۲}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه)

۱۲- گزینه «۲» ـ دو مثلث ABC و DBE باهم متشابه هستند، چون $\hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ , \hat{B}=\hat{B}$

با نوشتن نسبت تشابه به‌دست می‌آید:

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BD}$$

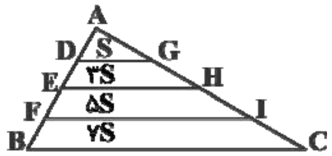
و

$$\frac{۱۰}{۸+۴}=\frac{۸}{۱۰-DC}$$

به‌دست می‌آید $DC=۰/۴$. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه)

۱۳- گزینه «۲» ـ می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه ، برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است. با توجه به این مطلب و قضیه اساسی به‌دست می‌آید:

اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هریک خطوطی به موازات قاعده رسم کنیم مساحت مثلث کوچک بالایی و سایر ذوزنقه‌های ایجاد شده تشکیل تصاعد عددی را با قدر نسبت ۲ می‌دهند. شکل را ببینید. اکنون می‌نویسیم:



$$\frac{S_{DGIF}}{S_{ABC}}=\frac{۸S}{۱۶S}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{DGIF}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۱۴۴=۷۲$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس چهارم ـ کاربردهای تالس و تشابه)