## هندسه ۳

۱- گزینه «۲» ـ درایه‌های بالای قطر اصلی دو ماتریس $A$ و $B$ به‌ترتیب از ضابطه‌های $ai+j$ و $i-j$ به‌دست می‌آیند. پس درایه‌های بالای قطر اصلی $A+B$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=ai+j+i-j=(a+1)i \qquad (i<j)$$

اگر بخواهیم این درایه‌ها همواره و به ازای هر مقدار $i$ صفر باشند باید $a=-1$ باشد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ عملیات روی ماتریس‌ها ـ جمع ماتریس)

۲- گزینه «۱» ـ از برابری $A^2-A=\overline{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2=A$. در نتیجه تمام توان‌های ماتریس $A$ برابر $A$ می‌شوند، یعنی $A^{1400}=A$. بنابراین باید مجموع درایه‌های $A$ را به‌دست آوریم.

از برابری $A^2=A$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2-b & -a-2 \\ ab+2b & -b+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

یعنی $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. اکنون می‌نویسیم:

$$\text{مجموع درایه‌های } A^{1400} = \text{مجموع درایه‌های } A = -1-1+2+2=2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۳- گزینه «۳» ـ در حالت کلّی می‌دانیم در ضرب ماتریس‌ها جابه‌جایی نداریم، بنابراین اتحادها برقرار نیستند. با این توضیح برابری داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} &(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2 \\ &\qquad , \\ &(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2+AB-BA-B^2 \Rightarrow 2B^2+2BA=\overline{O} \Rightarrow B^2+BA=\overline{O}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۴- گزینه «۱» ـ ابتدا ماتریس $A^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=3A$$

دو طرف برابری $A^2=3A$ را در $A$ ضرب می‌کنیم:

$$A^3=3A^2=3(3A)=3^2A$$

با ادامه این رَوَند نتیجه می‌گیریم $A^n=3^{n-1}A$. در نتیجه:

$$A^{1399}=3^{1398}A$$

بنابراین:

$$\text{مجموع درایه‌های ستون سوم } A^{1399} = 3^{1398}-3^{1398}+3^{1398}=3^{1398}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۵- گزینه «۱» ـ از برابری داده شده به دست می‌آید:

$$-A^3-A^2-A=I \Rightarrow A(-A^2-A-I)=I$$

بنابراین $A^{-1}=-A^2-A-I$، امّا این در گزینه‌ها وجود ندارد. با کمی دقت در برابری داده شده به دست می‌آید:

$$A^3=-A^2-A-I$$

اکنون به سادگی نتیجه می‌گیریم:

$$A^{-1}=A^3$$

روش دوم: چون $A\neq I$ (دقت کنید اگر $A=I$ برابری داده شده برقرار نیست) پس $A-I\neq O$. دو طرف برابری داده شده را در $A-I$ ضرب می‌کنیم و با توجه به اتحاد جبری می‌نویسیم:

$$(A-I)(A^3+A^2+A+I)=(A-I)\times\overline{O} \Rightarrow A^4-I=\overline{O} \Rightarrow A^4=I \Rightarrow A\times A^3=A^3\times A=I$$

بنابراین $A^{-1}=A^3$. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۶- گزینه «۲» ـ برابری $A^{-1} + B^{-1} = (2m-1)I$ را یک‌بار از چپ در $A$ و از سمت راست در $B$ ضرب می‌کنیم:

$$A(A^{-1}+B^{-1})B = A[(2m-1)I]B \Rightarrow \underbrace{AA^{-1}}_{I}B + A\underbrace{B^{-1}B}_{I} = (2m-1)AIB \Rightarrow B+A=(2m-1)AB$$

اکنون با مقایسه این برابری و برابری $A+B=(3m)(AB)$ نتیجه می‌گیریم:

$$3m = 2m-1 \Rightarrow m=-1$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۷- گزینه «۳» ـ بنابر نکته صفحه ۳۳ از کتاب همراه علوی، می‌دانیم اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی و $A$ معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA$$

یعنی:

$$X=(A^{-1}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}A)^{13550} = A^{-1}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}^{13550}A$$

می‌نویسیم:

$$B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow B^2=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}^2 = +I$$

در نتیجه:

$$B^{13550}=(B^2)^{6775}=I$$

اکنون می‌نویسیم:

$$X=A^{-1}IA=I$$

یعنی مجموع درایه‌های $X$ برابر ۲ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۸- گزینه «۲» ـ به سادگی به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{سطر اول } A = [2 \quad -1]\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = [2 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = [0 \quad -2]$$

در نتیجه:

$$\text{مجموع درایه‌های سطر اول } A = 0-2=-2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۹- گزینه «۲» ـ بنابر فرض مسئله:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m+1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2m\\ 4m-1\end{bmatrix}$$

چون $y=3$ بنابراین:

$$4m-1=3 \Rightarrow m=1$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$x=2m=2\times 1=2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه و معادلات)

۱۰- گزینه «۳» ـ شرط عدم وجود جواب در این دستگاه به‌صورت $\frac{a-1}{2}=\frac{2}{-a+2}\neq\frac{2}{1}$ است، به‌دست می‌آید:

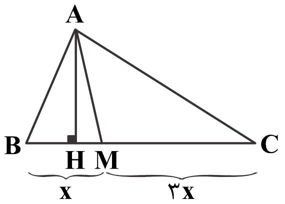
$$\frac{a-1}{2}=\frac{2}{-a+2} \Rightarrow -a^2+2a+a-2=4 \Rightarrow a^2-3a+6=0$$

در این معادله $\Delta<0$، پس این معادله ریشه حقیقی ندارد. در نتیجه این دستگاه هرگز فاقد جواب نیست.

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

## هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با فرض $BM = x$ به‌دست می‌آید $MC = ۳x$. چون دو مثلث $ABM$ و $ABC$ در ارتفاع وارد از رأس $A$ مشترک است، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی:



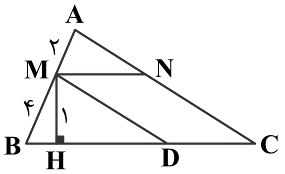

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{S_{ABC}} = \frac{x}{۴x} = \frac{۱}{۴}$$

به‌دست می‌آید:

$$S_{ABC} = ۸$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس اول)

۲- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم.




$$S_{MBD} = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times BD \times ۱ = ۴ \Rightarrow BD = ۸$$

اکنون در مثلث $BAC$ چون $MD \parallel AC$، بنابر قضیه تالس:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BM}{MA} \Rightarrow \frac{۸}{DC} = \frac{۴}{۲} \Rightarrow DC = ۴$$

در نتیجه:

$$BC = ۸ + ۴ = ۱۲$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس)

۳- گزینه «۳» ـ دو مثلث $ABC$ و $BDE$ به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند ( $\hat{B}$ در هر دو مشترک است و $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$ ) با نوشتن نسبت‌های تشابه به‌دست می‌آید:

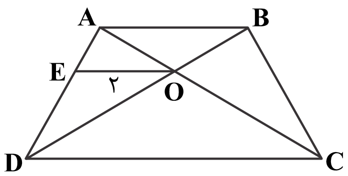
$$\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴ + x} = \frac{y}{۲۴} = \frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ \\ y = ۱۲ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x + y = ۲۴$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه)

۴- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. در مثلث $DAB$ بنابر تعمیم قضیه تالس:




$$\frac{OE}{AB} = \frac{DE}{DA} \qquad (۱)$$

به‌طور مشابه در مثلث $ADC$ هم بنابر تعمیم قضیه تالس:

$$\frac{OE}{DC} = \frac{AE}{AD} \qquad (۲)$$

با جمع کردن برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$OE\left(\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}\right) = ۱ \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}}_{\text{مجموعِ معکوس دو قاعـــده}} = \frac{۱}{OE} = \frac{۱}{۲}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس)

۵- گزینه «۳» ـ دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه است. یعنی اگر $k$ نسبت تشابه باشد، به‌دست می‌آید:

$$\frac{S}{S'} = k^۲$$

از طرف دیگر نسبت محیط‌های دو شکل متشابه برابر نسبت تشابه است یعنی:

$$k = ۹$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\frac{S}{S'} = ۹^۲ = ۸۱$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس چهارم ـ کاربرد تشابه)