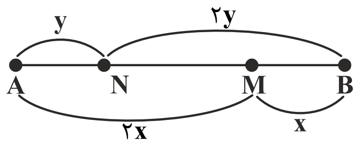
هندسه

۱- گزینه «۱» ـ اگر $a = ۶$ و $b = ۸$ در نظر گرفته شود، گزینه «۱» نادرست است.

$$\frac{a+۲}{b+۱} = \frac{۶+۲}{۸+۱} = \frac{۸}{۹} \neq \frac{۴}{۵}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ نسبت و تناسب) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم:



بنا بر فرض:

$$AB = a \Rightarrow ۳x = ۳y = a \Rightarrow x = y = \frac{a}{۳}$$

از روی شکل می‌نویسیم:

$$MN = AM - AN = ۲x - y \xrightarrow{x=y} MN = ۲x - x = x = \frac{a}{۳}$$

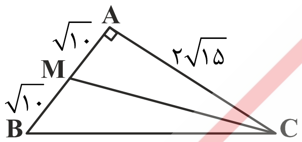
(آزاد ریاضی ـ ۷۱) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ تناسب و ویژگی‌های آن) (آسان)

۳- گزینه «۳» ـ با توجه به اندازه‌های مشخص شده و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع‌های AB و AC به‌دست می‌آیند:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۴ \times ۱۰ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow AC^۲ = ۶ \times ۱۰ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۵}$$

اکنون توجه کنید که بزرگ‌ترین میانه، میانه وارد بر کوچک‌ترین ضلع است، پس باید میانه وارد بر ضلع AB را به‌دست آوریم (یعنی CM در شکل).

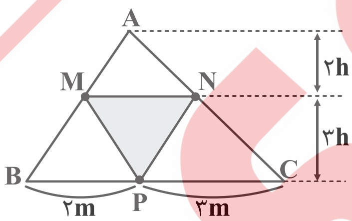


بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ACM به‌دست می‌آید:

$$CM = \sqrt{AC^۲ + AM^۲} = \sqrt{۶۰+۱۰} = \sqrt{۷۰}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۳ ـ کاربرد تشابه) (دشوار)

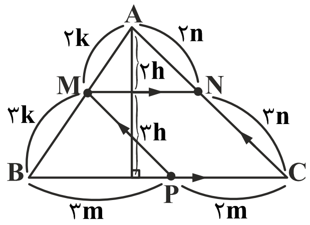
۴- گزینه «۱» ـ توجه کنید که دو مثلث AMN و MNP در قاعده MN مشترک هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر ارتفاع‌ها است، در نتیجه نمادگذاری شکل مقابل به‌دست می‌آید. اکنون می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{MBP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲m \times ۳h}{\frac{۱}{۲} \times ۵m \times ۵h} = \frac{۶}{۲۵} = ۲۴\%$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس ۲ ـ تالس) (متوسط)

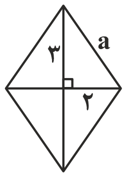
۵- گزینه «۱» ــ چون $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$، پس بنابر قضیه تالس می‌توان اندازه پاره‌خط‌ها را به‌صورت مشخص شده در شکل در نظر گرفت. از طرف دیگر خط MN ارتفاع وارد بر BC را هم به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌کند. اکنون به‌دست می‌آید:



$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}}=\frac{2m\times 3h}{\frac{1}{2}\times 5m\times 5h}=\frac{12}{25}=48\%$$

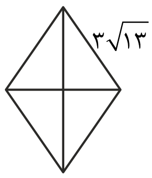
(سراسری خارج از کشور تجربی ــ ۸۹) (پایه دهم ــ فصل دوم ــ درس ۲ ــ تالس) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده و طول ضلع لوزی با معلوم بودن دو قطر به‌دست می‌آوریم:



$$a=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

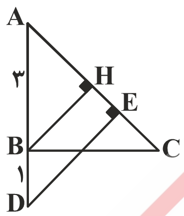
اکنون با توجه به این‌که نسبت مساحت‌های دو لوزی متشابه مربع نسبت تشابه است، می‌توان نوشت:



$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

(هویدی) (پایه دهم ــ فصل دوم ــ درس ۴ ــ کاربرد تشابه) (آسان)

۷- گزینه «۲» ــ از B عمود BH را بر BC وارد می‌کنیم. چون BH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث ABC است، پس:



$$BH=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$$

(توجه کنید که طول AC را با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث ABC به‌دست آوردیم). اکنون بنابر تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{BH}{DE}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{\frac{12}{5}}{DE}=\frac{3}{4}\Rightarrow DE=\frac{16}{5}=3/2$$

(هویدی) (پایه دهم ــ فصل دوم ــ درس ۲ و ۳ ــ تالس و تشابه) (آسان)

۸- گزینه «۳» ــ می‌توان نوشت:

درایه سطر دوم، ستون سوم ABC $=(1\ \ 2\ \ -1)\begin{pmatrix}3x&1&4\\2&5&1\\6&x&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=(3x-2\ \ \ 11-x\ \ \ 6-x)\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=9x-6+6-x=8x$

چون این درایه برابر ۱۶ است، پس:

$$8x=16\Rightarrow x=2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ ضرب ماتریس‌ها) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{bmatrix}=-A$$

در نتیجه:

$$A^{100}=(-1)^{99}A=-A$$

پس:

$$\text{مجموع درایه‌های } A^{100} = -(\text{مجموع درایه‌های } A) = -(2-6+1-3)=6$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ توان در ماتریس) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» ـ از برابری داده شده به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1} I \begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\underbrace{\left(\frac{1}{6-5}\right)}_{1}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\underbrace{\left(\frac{1}{3-4}\right)}_{-1}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}14 & -17\\ -5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & 17\\ 5 & -6\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های A برابر $-14+17+5-6=2$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ماتریس وارون) (آسان)

۱۱- گزینه «۴» ـ از برابری $A^2=2I$ به‌دست می‌آید:

$$A^2-I=I \Rightarrow (A-I)(A+I)=I \Rightarrow (A-I)^{-1}=A+I$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$A(A-I)^{-1}=A(A+I)=A^2+A=2I+A$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ماتریس وارون) (دشوار)

۱۲- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ 1-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+1\\ 3m+2\end{bmatrix}$$

یعنی $x=2m+1$ و $y=3m+2$، از طرف دیگر بنابر فرض $x=4-m$ و $y=n-1$، بنابراین:

$$\begin{cases}2m+1=4-m \Rightarrow m=1\\ 3m+2=n-1 \xrightarrow{m=1} n=6\end{cases}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دستگاه معادلات) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» ـ ماتریس ضرایب دستگاه به‌صورت $A=\begin{bmatrix}-4 & a\\ 2 & b\end{bmatrix}$ است و به‌دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}b & -a\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}b & -a\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -\frac{1}{4}(-4-12)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ 4\end{bmatrix}$$

یعنی $y=4$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دستگاه معادلات) (دشوار)