

۱- گزینه «۳» - تذکر: وقتی یک ماتریس قطری به توان می‌رسد فقط عناصر قطر اصلی آن به توان می‌رسند.

$$A^{10} + A^{11} + A^{12} + \dots + A^{18} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

۱۱ = جمع درایه‌ها

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (آسان)

۲- گزینه «۴» - دترمینان ماتریسی که وارون‌ناپذیر است صفر می‌باشد.

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = \frac{2}{3}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + B)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (متوسط)

۴- گزینه «۱» -

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_B A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BAC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B^{-1} \times \square \times C^{-1}} B^{-1} B A C C^{-1} = B^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 24 & -42 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر اول} = 12 \Rightarrow \text{سطر اول}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (دشوار)

۵- گزینه «۳» -

$$(\alpha A + \beta I)^{-1} = A \Rightarrow \alpha A + \beta I = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -\frac{1}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$A^2 = 3A^{-1} \xrightarrow{\times A} A^3 = 3I \Rightarrow A^3 - I = 2I$$

$$\Rightarrow (A - I)(A^2 + A + I) = 2I \Rightarrow (A - I) \left[\frac{1}{3}(A^2 + A + I) \right] = I$$

$$\Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 + A + I)$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (متوسط)

۷- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} mx + 2y = 5 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{شرط فاقد جواب بودن: } \frac{m}{3} = \frac{2}{1} \neq \frac{5}{7} \Rightarrow m = 6$$

$$\begin{cases} 3x - my = -3m \\ -x + 2y = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = -18 \\ -x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{-18}{6}$$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد. چون دو خط بر هم منطبق هستند.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (آسان)

۸- گزینه «۱» -

$$B^{-1}(A^{-1}C) = (B^{-1}A^{-1})C = (AB)^{-1}C$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}$$

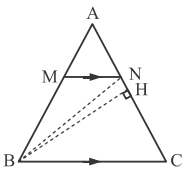
$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 3 + (-12) = -9$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - دو مثلث ارتفاع مشترک دارند (BH) بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها همان

$$\left(\frac{AN}{NC} \right)$$

نسبت قاعده‌هاست.



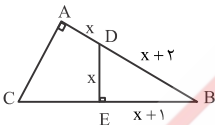
$$\frac{MN}{BC} = \frac{2}{5} = \text{جز به کل}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$$

(یاقوتی) (پایه دهم - فصل دوم) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - در مثلث قائم‌الزاویه DEB اندازه‌های اضلاع ۳ عدد متوالی هستند. بنابراین این

اضلاع «۳»، «۴»، و «۵» هستند یعنی $x = 3$ از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویه DEB و ABC متشابه هستند.



$$\triangle ABC \sim \triangle EBD \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{EB}{AB} \Rightarrow \frac{3}{AC} = \frac{4}{8} \Rightarrow AC = 6$$

$$\triangle ABC \text{ فیثاغورس در } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 10$$

$$ABC \text{ محیط مثلث } AB + BC + AC = 8 + 10 + 6 = 24$$

(یاقوتی) (پایه دهم - فصل دوم) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

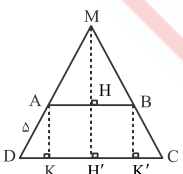
$$DK = CK' = \frac{15 - 9}{2} = 3$$

$$\triangle AKD \text{ در مثلث قائم الزاویه } AK^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AK = 4$$

دو مثلث MAB و MDC متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{9}{15}$ است. با توجه به

این‌که نسبت ارتفاع‌های ۲ مثلث با نسبت تشابه برابر است می‌توان گفت:

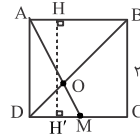
$$\frac{MH}{MH'} = \frac{9}{15} \Rightarrow \frac{MH}{4 + MH} = \frac{3}{5} \Rightarrow MH = 6$$



(یاقوتی) (پایه دهم - فصل دوم) (دشوار)

۱۲- گزینه «۲» - با توجه به شکل ۲ مثلث AOB و DOM متشابه هستند و نسبت به تشابه

$$\frac{DM}{AB} = \frac{1}{2} \text{ است. زیرا } \frac{1}{2}$$



بنابراین نسبت ارتفاع‌های ۲ مثلث نیز $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = 2OH'$$

$$2 = HH' = OH + OH' = 2OH' + OH' = 3OH'$$

$$\Rightarrow OH' = \frac{2}{3}, OH = \frac{4}{3}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

(یاقوتی) (پایه دهم - فصل دوم) (متوسط)