گسسته

۱- گزینه «۳» ـ به روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها بررسی می‌کنیم:

n	۲	۳	۴	۵	۶
$\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}$	۱	۱۶	۱۰۰	۴۰۰	۱۲۲۵
زوج بودن	×	✓	✓	✓	×

$$A=\{۳\,,۴\,,۵\}$$

درنتیجه A حداکثر دارای ۳ عضو است:

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ استدلال ریاضی ـ در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۲- گزینه «۴» ـ عدد گویای $a=۰$ و عدد گنگ دل‌خواه b مثال نقض برای گزینه‌ها هستند:

$$\underset{\text{گویا}}{a}\,\underset{\text{گنگ}}{b}=۰\times b=۰\notin Q'$$

گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» اثبات می‌شوند.

گزینه «۱»: فرض کنید $K=۲n(۲n+۲)$ می‌نویسیم:

$K+۱=۲n(۲n+۲)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$ مربع کامل است.

گزینه «۲»: دو حالت ممکن است رُخ دهد:

الف) n زوج است، به عبارت دیگر $n=۲k\ (k\in\mathbb{N})$:

$n^۲-۳n+۵=(۲k)^۲-۳(۲k)+۵=۴k^۲-۶k+۵=۴k^۲-۶k+۴+۱=۲(۲k^۲-۳k+۲)+۱$ که حاصل عددی فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n=۲k+۱\ (k\in w)$:

$$n^۲-۳n+۵=(۲k+۱)^۲-۳(۲k+۱)+۵=۴k^۲+۴k+۱-۶k-۳+۵=۴k^۲-۲k+۳=۲(۲k^۲-k+۱)+۱$$

که بازهم حاصل یک عدد فرد است.

گزینه «۳»: چون ab فرد است، پس a و b هم فرد هستند، به‌عبارت دیگر $a=۲k+۱$ و $b=۲k'+۱$ $(k\,,k'\in w)$ که عددی زوج است.

$$a^۲+b^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱=۲(۲k^۲+۲k+۲k'^۲+۲k'+۱)$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ استدلال ریاضی ـ مثال نقض)

۳- گزینه «۲» ـ چون صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود، پس باید $n^۳-۱=۰$ یعنی $n=۱$.

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح)

۴- گزینه «۳» ـ برای این‌که $y\in\mathbb{Z}$، باید $\frac{۱}{۲x+۵}\in\mathbb{Z}$، زمانی یک کسر عدد صحیح است که صورتِ آن بر مخرجش بخش‌پذیر باشد:

$$۲x+۵\,|\,۱\Rightarrow\begin{cases}۲x+۵=۱\\۲x+۵=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲\\x=-۳\end{cases}$$

پس منحنی از ۲ نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد:

$$A=(-۲\,,۱)\,,B=(-۳\,,-۱)$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ عاد کردن)

۵- گزینه «۳» ـ بنابر فرض می‌نویسیم:

$$\begin{cases}a\,|\,۷m+۱\\a\,|\,۶m+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\,|\,۴۲m+۶\\a\,|\,۴۲m+۷\end{cases}\Rightarrow a\,|\,(۴۲m+۷)-(۴۲m+۶)\Rightarrow a\,|\,۱$$

بنابراین $a=۱$ یا $a=-۱$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ عاد کردن)

۶- گزینه «۱» ـ می‌دانیم اگر $a\,|\,b$ آن‌گاه $|a|\le|b|$ مگر اینکه $b=۰$. پس بنابر فرض مسئله باید $(b+۱)^۲+(c-۱)^۲=۰$ در نتیجه $c=۱$ و $b=-۱$ (هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ عاد کردن)

۷- گزینه «۳» ـ از رابطه $n^۲-۱\,|\,۲n-۱$ (فرض مسئله) و $n^۲-۱\,|\,n^۲-۱$ (بازتابی) ضریب n را در سمت راست حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}n^۲-۱\,|\,۲n^۲-n\\n^۲-۱\,|\,۲n^۲-۲\end{cases}\Rightarrow n^۲-۱\,|\,(۲n^۲-۲)-(۲n^۲-n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow n^۲-۱\,|\,n-۲\Rightarrow n^۲-۱\,|\,۲n-۴\\(\text{فرض})\,n^۲-۱\,|\,۲n-۱\end{array}\right\}\Rightarrow n^۲-۱\,|\,۳$$

پس $n^۲-۱$ یکی از مقسوم علیه‌های ۳ است، لذا $n^۲-۱=\pm۱$ ، ±۳ و در مجموعه عددهای طبیعی بـه‌ازای $n=۰$ ، $n=۲$ و $n=-۲$ رابطـه مورد نظر برقرار است. (هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ عاد کردن)

۸- گزینه «۴» ـ چون $a \mid b$ ، پس $b = aq$. اکنون در رابطه $b \mid ۵a$ بدست می‌آید

$$aq \mid ۵a \xrightarrow{a\neq ۰} q \mid ۵ \Rightarrow q = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۵$$

در نتیجه $\frac{b}{a}$ برابر ± ۱ یا ± ۵ است. اکنون بدست می‌آید:

$$\left(\frac{b}{a}\text{ بیشترین مقدار}\right) - \left(\frac{b}{a}\text{ کمترین مقدار}\right) = ۵ - (-۵) = ۱۰$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ عاد کردن)

۹- گزینه «۱» ـ فرض کنید a عددی طبیعی باشد به‌طوری‌که $p + ۹ = a^۲$. دراین‌صورت:

$$p = a^۲ - ۹ \Rightarrow p = (a-۳)(a+۳) \xrightarrow[a+۳>۱]{p \text{ اول است}} \begin{cases} a - ۳ = ۱ \\ p = a + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ p = ۷ \end{cases}$$

بنابراین $p + ۹$ فقط به‌ازای $p = ۷$ برابر مربع یک عدد طبیعی است.

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ اعداد اول)

۱۰- گزینه «۱» ـ فرض کنید $d = (۵a + ۳ \text{ و } ۷a + ۴)$ در نتیجه:

$$\begin{cases} d \mid ۷a + ۴ \\ d \mid ۵a + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۳۵a + ۲۰ \\ d \mid ۳۵a + ۲۱ \end{cases} \Rightarrow d \mid (۳۵a + ۲۱) - (۳۵a + ۲۰) \Rightarrow d \mid ۱ \xrightarrow{d>۰} d = ۱$$

بنابراین برابری داده شده درصورت مسئله هیچ‌گاه برقرار نیست.

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ ب . م . م)

۱۱- گزینه «۴» ـ فرض کنید $d = (a , b)$ دراین‌صورت

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid ۳a - ۵b \Rightarrow d \mid ۲۸$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۷ در این رابطه صدق می‌کند. (هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ ب . م . م)

۱۲- گزینه «۴» ـ بدست می‌آید:

$$([a^۳ , a^۴]) , [a^۶ , a^۵]) = (a^۴ , a^۵) = a^۴$$

(هویدی) (گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ ک . م . م)