ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۴» ـ توجه کنید x و y زمانی می‌توانند مثال نقض مناسب برای این گزاره باشند که در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x و y، هر دو عددی اول باشند (رد گزینه‌های «۱» و «۳»)

۲) مقدار $x^۲ + y^۲$ عددی مرکب باشد. (رد گزینه «۲»):

$$۲^۲ + ۳^۲ = ۴ + ۹ = ۱۳ \quad \times$$

توجه کنید که در گزینه «۴»، هم ۱۱ و هم ۹۷ اول هستند و مجموع مربعات آن‌ها چون عددی زوج می‌شود پس قطعاً عددی مرکب است.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ مثال نقض)

۲- گزینه «۴» ـ چهار حالت باید در نظر بگیریم:

(۱) a و b زوج باشند:

$$a = ۲k \quad ، \quad b = ۲k' \Rightarrow ab = ۴kk' = ۲(۲kk') = ۲q \quad \times$$

(۲) a زوج و b فرد باشند:

$$a = ۲k \quad ، \quad b = ۲k' + ۱ \Rightarrow ab = ۲\underbrace{k(۲k' + ۱)}_{q} = ۲q \quad \times$$

(۳) a فرد و b زوج باشند:

$$a = ۲k + ۱ \quad ، \quad b = ۲k' \Rightarrow ab = (۲k + ۱)(۲k') = ۲(\underbrace{k'(۲k + ۱)}_{q}) = ۲q \quad \times$$

(۴) a و b فرد باشند:

$$a = ۲k + ۱ \quad ، \quad b = ۲k' + ۱ \Rightarrow ab = (۲k + ۱)(۲k' + ۱) = ۴kk' + ۲k + ۲k' + ۱ = ۲(\underbrace{۲kk' + k + k'}_{q}) + ۱ = ۲q + ۱ \quad \checkmark$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۳- گزینه «۴» ـ می‌توان به روش‌های زیر، با اثبات بازگشتی این نابرابری را اثبات کرد: روش اول:

$$a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow ۲a^۲ + ۲ab + ۲b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab + a^۲ + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow \boxed{(a + b)^۲ + a^۲ + b^۲ \geq ۰}$$

روش دوم:

$$a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + ab + b^۲ + \frac{b^۲}{۴} - \frac{b^۲}{۴} \geq ۰ \Leftrightarrow \boxed{(a + \frac{b}{۲})^۲ + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰}$$

مشابه روش دوم، با اضافه و کم کردن $\frac{a^۲}{۴}$ به نابرابری می‌رسیم:

$$(\frac{a}{۲} + b)^۲ + \frac{۳a^۲}{۴} \geq ۰$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ اثبات بازگشتی)

۴- گزینه «۲» ـ می‌دانیم اگر $a \mid b$ و $|b| < |a|$ آن‌گاه $b = ۰$. اکنون به‌دست می‌آید:

$$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳$$

یعنی تنها یک مقدار برای x به‌دست می‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ بخش‌پذیری)

۵- گزینه «۳» ـ اثبات درستی گزینه «۳»:

مرحله اول: از درستی $a \mid b - ۳a$ نتیجه می‌گیریم $a \mid b + a^۳$.

$$\begin{cases} a \mid b - ۳a \Rightarrow a \mid b - ۳a + ۳a \Rightarrow a \mid b \\ a \mid ۳a \end{cases} \left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid a^۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b + a^۳$$

مرحله دوم: از درستی $a \mid b + a^۳$ نتیجه می‌گیریم $a \mid b - ۳a$.

$$\begin{cases} a \mid b + a^۳ \Rightarrow a \mid b + a^۳ - a^۳ \Rightarrow a \mid b \\ a \mid a^۳ \end{cases} \left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid ۳a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b - ۳a$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ بخش‌پذیری ـ شبیه‌سازی)

۶- گزینه «۲» ـ از رابطه $b \mid a$ نتیجه می‌گیریم $a = bq$. این برابری را در رابطه $a + 8b \mid 2a - b$ قرار می‌دهیم و به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{r} bq + 8b \mid 2bq - b \;\Rightarrow\; q + 8 \mid 2q - 1 \\ \text{می دانیم: } \; q + 8 \mid q + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow q + 8 \mid 2(q + 8) - (2q - 1) = 17$$

یعنی:

$$q + 8 = 1 \Rightarrow q = -7$$
$$q + 8 = -1 \Rightarrow q = -9$$
$$q + 8 = 17 \Rightarrow q = 9$$
$$q + 8 = -17 \Rightarrow q = -25$$

بنابراین بیشترین مقدار $q = \frac{a}{b}$ برابر ۹ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس اول ـ بخش‌پذیری)

۷- گزینه «۲» ـ با ساده کردن رابطه $6a + 3 \mid 3a - 6$ عدد ۳ به‌دست می‌آید:

$$2a + 1 \mid a - 2$$

با مقایسه $2a + 1 \mid a - 2$ و $a - 2 \mid 2a + 1$ نتیجه می‌گیریم:

$$2a + 1 = a - 2 \quad \text{یا} \quad 2a + 1 = -(a - 2)$$

یعنی $a = -3$ و $a = \frac{1}{3}$. چون $a \in \mathbb{Z}$ پس $a = -3$. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری)

۸- گزینه «۲» ـ زمانی رابطه داده شده به ازای هر عدد صحیح n برقرار است که $m^3 + 4m^2 - 21m = 0$ یعنی:

$$m(m^2 + 4m - 21) = 0 \Rightarrow m(m - 3)(m + 7) = 0$$

در نتیجه:

$$m = 0 \quad \text{یا} \quad m = 3 \quad \text{یا} \quad m = -7$$

در بین این مقادیر فقط $m = 3$ عددی طبیعی است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ بخش‌پذیری)

۹- گزینه «۳» ـ چون ب.م.م دو عدد، هر دو عدد را می‌شمارد، پس گزینه‌ای جواب است که ۵۶ را بشمارد. امّا با این اطلاعات هم گزینه «۱» و هم گزینه «۳» درست می‌شوند. با کمی دقت در $4m + 2$ و ۵۶ مشاهده می‌کنیم هر دو عدد زوج هستند، یعنی ب.م.م هم باید زوج باشد، در نتیجه فقط عدد ۱۴ مورد قبول است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م)

۱۰- گزینه «۱» ـ ابتدا می‌نویسیم:

$$d = (12a^2 , 18ab) = |6a|(2a , 3b)$$

از طرف دیگر چون $a \mid b$ پس $b = aq$:

$$d = |6a|(2a , 3aq) = 6a^2(2 , 3q)$$

چون b فرد است و $b = aq$ بنابراین q هم عددی فرد است در نتیجه $3q$ هم فرد بوده و $(2 , 3q) = 1$. اکنون به دست می‌آید:

$$d = 6a^2 \times 1 = 6a^2$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م)

۱۱- گزینه «۴» ـ به سادگی می‌توان با فرضِ $a = 5$ و $b = 3$ مثال نقضی برای گزینه «۴» به‌دست آورد:

$$(a + b , a - b) = (8 , 2) = 2 \neq 1$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م)

۱۲- گزینه «۱» ـ می‌دانیم دو عدد متوالی همواره نسبت به هم اول هستند. بنابراین همواره $(5m + 3 , 5m + 4) = 1$.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ب.م.م)

۱۳- گزینه «۳» ـ فرض کنید $d = (a , a+۳)$، پس:

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid a+۳ \end{cases} \Rightarrow d \mid (a+۳)-a \Rightarrow d \mid ۳ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۳$$

امّا چون a مضرب ۳ نیست، پس $d = ۱$.

از طرف دیگر می‌دانیم اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند ک.م.م آن‌ها برابر قدرمطلق ضرب آن دو عدد است، در نتیجه:

$$[a , a+۳] = |a(a+۳)| = |a^۲ + ۳a|$$

اکنون به سادگی عبارتِ خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$[\underbrace{(a , a+۳)}_{۱} , \underbrace{[a , a+۳]}_{|a(a+۳)|}] = [۱ , |a(a+۳)|] = |a(a+۳)| = |a^۲ + ۳a|$$

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ک.م.م)

۱۴- گزینه «۲» ـ چون $۱۸۷ = ۱۱ \times ۱۷$، پس $۱۷ \mid ۱۸۷$، در نتیجه:

$$(۱۷ , ۱۸۷) = ۱۷$$

از طرف دیگر $۵۱ = ۳ \times ۱۷$ یعنی $۱۷ \mid ۵۱$، بنابراین:

$$[۱۷ , ۵۱] = ۵۱$$

اکنون به سادگی به‌دست می‌آید:

$$[(۱۷ , ۱۸۷) , ۵۱] = [۱۷ , ۵۱] = ۵۱$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ک.م.م)