ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد:

«۲» گزینه: $n = 4 \to 2^4 + 1 = 17 \times$ «۱» گزینه: $n = 2 \to 2^2 + 1 = 5 \times$

«۳» گزینه: $n = 6 \to 2^6 + 1 = 65 \checkmark$ «۴» گزینه: $n = 8 \to 2^8 + 1 = 257 \times$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ مثال نقض) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ عبارتی که می‌خواهیم ثابت کنیم را ساده می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$
$$(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2(\sqrt{a})(\sqrt{b}) \geq 0$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 : \text{گزاره همیشه درست}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ اثبات بازگشتی) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$ab^2c = d^2e \Rightarrow \begin{cases} \text{«۱» گزینه}: d^2 \mid ab^2c \\ \text{«۲» گزینه}: (abc)b = d^2e \Rightarrow abc \mid d^2e \\ \text{«۳» گزینه}: a(b^2c) = d^2e \Rightarrow a \mid d^2e \end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ مفهوم بخش‌پذیری) (آسان)

۴- گزینه «۲» ـ ابتدا توجه کنید که چون m عددی طبیعی است، پس $3m+1 \geq 4$. از طرف دیگر $3m+1$ مقسوم‌علیه ۱۲ است، بنابراین:

$$3m+1 = 4 \Rightarrow m = 1 \checkmark$$
$$3m+1 = 6 \Rightarrow m = \frac{5}{3} \times$$
$$3m+1 = 12 \Rightarrow m = \frac{11}{3} \times$$

پس فقط یک مقدار طبیعی برای m به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی بخش‌پذیری) (آسان)

۵- گزینه «۲» ـ بنابر فرض $3n+7 \mid n+2$، اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix} 3n+7 \mid n+2 \\ 3n+7 \mid 3n+7 \end{matrix} \Rightarrow 3n+7 \mid (3n+7) - 3(n+2) \Rightarrow 3n+7 \mid 1$$

در نتیجه:

$$3n+7 = 1 \Rightarrow n = -2 \in \mathbb{Z}$$
$$3n+7 = -1 \Rightarrow n = -\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین فقط یک مقدار صحیح برای n به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ قواعد بخش‌پذیری) (آسان)

۶- گزینه «۱» ـ می‌دانیم اگر $x \neq 0$ و $x \mid y$، آن‌گاه $|x| \leq |y|$. اکنون با توجه به طبیعی بودن a و b می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a+3 \leq b+3 \\ b+4 \leq a+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a+1 \end{cases} \Rightarrow a \leq b \leq a+1$$

چون a و $a+1$ دو عدد طبیعی متوالی هستند، پس نابرابری زمانی رخ می‌دهد که $a = b$ یا $b = a+1$. اگر $a = b$ از $b+4 \mid a+5$، نتیجه می‌گیریم:

$$a+4 \mid a+5 \xrightarrow{a+4 \mid a+4} a+4 \mid (a+5)-(a+4) \Rightarrow a+4 \mid 1 \Rightarrow a+4 = 1 \text{ یا } a+4 = -1$$

و این امکان‌پذیر نیست. اگر $b = a+1$ از $a+3 \mid b+3$، نتیجه می‌گیریم:

$$a+3 \mid (a+1)+3 \Rightarrow a+3 \mid a+4 \xrightarrow{a+3 \mid a+3} a+3 \mid (a+4)-(a+3) \Rightarrow a+3 \mid 1 \Rightarrow a+3 = 1 \text{ یا } a+3 = -1$$

و این هم امکان‌پذیر نیست، پس هیچ مقداری برای a و b به‌دست نمی‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی‌های بخش‌پذیری) (متوسط)

۷- گزینه «۳» ـ می‌دانیم به ازای هر عدد صحیح a، $a \mid 0$، بنابراین وقتی این رابطه به‌ازای هر n برقرار است که $2m^3 - m^2 - 4m + 3 = 0$:

$$2m^3 - m^2 - 4m + 3 = 0 \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{m=1} (m-1)(2m^2 + m - 3) = 0 \Rightarrow (m-1)(m-1)(2m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین برای m فقط یک مقدار صحیح به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی‌های بخش‌پذیری) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$P+۲۴=(۲k-۱)(۲k+۱) \Rightarrow P+۲۴=۴k^۲-۱ \Rightarrow P=۴k^۲-۲۵ \Rightarrow P=(۲k-۵)(۲k+۵)$$

چون P عددی اول است و $۲k-۵<۲k+۵$، پس:

$$۲k-۵=۱ \Rightarrow k=۳$$

$$۲k+۵=P \xrightarrow{k=۳} P=۱۱$$

پس فقط به‌ازای یک مقدارِ اول برای P شرایط مسئله برقرار است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ اعداد اول) (متوسط)

۹- گزینه «۳» ـ چون $۱+۳^۴=۸۲$، پس باید $۱+۳^۴ \mid ۳^n+۱$. این رابطه زمانی برقرار است که $\frac{n}{۴}$ فرد باشد؛ یعنی:

$$\frac{n}{۴}=۲k+۱ \Rightarrow n=۸k+۴$$

چون n باید دو رقمی باشد، پس $۱۰\le n\le ۹۹$؛ یعنی:

$$۱۰\le ۸k+۴\le ۹۹ \Rightarrow ۱\le k\le ۱۱$$

یعنی ۱۱ مقدار برای k و در نتیجه ۱۱ مقدار برای n به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ بخش‌پذیری ـ اتحادها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ـ ابتدا عددها را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۲۹۶=۲^۳\times ۳۷\,,\,۳۳۳=۳^۳\times ۳۷ \Rightarrow (۲۹۶\,,\,۳۳۳)=۳۷$$

$$۲۸۸=۲^۵\times ۳^۲\,,\,۹۹۹=۳^۳\times ۳۷ \Rightarrow (۲۸۸\,,\,۹۹۹)=۳^۲=۹$$

در نتیجه:

$$[(۲۹۶\,,\,۳۳۳)\,,\,(۲۸۸\,,\,۹۹۹)]=[۳۷\,,\,۹]=۳۷\times ۹=۳۳۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م و ک.م.م) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$((۲a\,,\,۳a)\,,\,[a^۲\,,\,۲a^۳])$$
$$=(a\underbrace{(۲\,,\,۳)}_{۱}\,,\,۲a^۳)\quad (\text{چون } a^۲\mid ۲a^۳)$$
$$=(a\,,\,۲a^۳)\quad (\text{چون } a\mid ۲a^۳)$$
$$=a$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م و ک.م.م) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» ـ بنابر تعریف ب.م.م می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۳n^۲-۲n+۶ \\ d\mid ۳n+۵ \xrightarrow{\text{در } n \text{ راست}} d\mid ۳n^۲+۵n \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} d\mid ۷n-۶$$

در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۷n-۶ \\ d\mid ۳n+۵ \end{array}\right\} \Rightarrow d\mid ۷(۳n+۵)-۳(۷n-۶) \Rightarrow d\mid ۵۳$$

چون $d\neq ۱$، پس $d=۵۳$. (سراسری خارج از کشور ـ ۹۹) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م) (دشوار)