ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد:

گزینه «۱»: $n=۲ \to ۲^{۲}+۱=۵$ ×

گزینه «۲»: $n=۴ \to ۲^{۴}+۱=۱۷$ ×

گزینه «۳»: $n=۶ \to ۲^{۶}+۱=۶۵$ ✓

گزینه «۴»: $n=۸ \to ۲^{۸}+۱=۲۵۷$ ×

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ مثال نقض) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ عبارتی که می‌خواهیم ثابت کنیم را ساده می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰$$

$$(\sqrt{a})^{۲}+(\sqrt{b})^{۲}-۲(\sqrt{a})(\sqrt{b}) \geq ۰$$

گزاره همیشه درست: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geq ۰$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ اثبات بازگشتی) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$ab^{۲}c=d^{۲}e \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه «۱»}: d^{۲} \mid ab^{۲}c \\ \text{گزینه «۲»}: (abc)b=d^{۲}e \Rightarrow abc \mid d^{۲}e \\ \text{گزینه «۳»}: a(b^{۲}c)=d^{۲}e \Rightarrow a \mid d^{۲}e \end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ مفهوم بخش‌پذیری) (آسان)

۴- گزینه «۲» ـ ابتدا توجه کنید که چون m عددی طبیعی است، پس $۴ \leq ۳m+۱$، از طرف دیگر $۳m+۱$ مقسوم‌علیه ۱۲ است، بنابراین:

$$۳m+۱=۴ \Rightarrow m=۱ \checkmark$$

$$۳m+۱=۶ \Rightarrow m=\frac{۵}{۳} \times$$

$$۳m+۱=۱۲ \Rightarrow m=\frac{۱۱}{۳} \times$$

پس فقط یک مقدار طبیعی برای m به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی بخش‌پذیری) (آسان)

۵- گزینه «۲» ـ بنابر فرض $۳n+۷ \mid n+۲$، اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix} ۳n+۷ \mid n+۲ \\ ۳n+۷ \mid ۳n+۷ \end{matrix} \Rightarrow ۳n+۷ \mid (۳n+۷)-۳(n+۲) \Rightarrow ۳n+۷ \mid ۱$$

در نتیجه:

$$۳n+۷=۱ \Rightarrow n=-۲ \in \mathbb{Z}$$

$$۳n+۷=-۱ \Rightarrow n=-\frac{۸}{۳} \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین فقط یک مقدار صحیح برای n به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ قواعد بخش‌پذیری) (آسان)

۶- گزینه «۱» ـ می‌دانیم اگر $x \neq ۰$ و $x \mid y$، آن‌گاه $|x| \leq |y|$. اکنون با توجه به طبیعی بودن a و b می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a+۳ \leq b+۳ \\ b+۴ \leq a+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a+۱ \end{cases} \Rightarrow a \leq b \leq a+۱$$

چون a و $a+۱$ دو عدد طبیعی متوالی هستند، پس نابرابری زمانی رخ می‌دهد که $a = b$ یا $b = a+۱$. اگر $a = b$ از $b+۴ \mid a+۵$، نتیجه می‌گیریم:

$$a+۴ \mid a+۵ \xrightarrow{a+۴ \mid a+۴} a+۴ \mid (a+۵)-(a+۴) \Rightarrow a+۴ \mid ۱ \Rightarrow a+۴ = ۱ \text{ یا } a+۴ = -۱$$

و این امکان‌پذیر نیست. اگر $b = a+۱$ از $a+۳ \mid b+۳$، نتیجه می‌گیریم:

$$a+۳ \mid (a+۱)+۳ \Rightarrow a+۳ \mid a+۴ \xrightarrow{a+۳ \mid a+۳} a+۳ \mid (a+۴)-(a+۳) \Rightarrow a+۳ \mid ۱ \Rightarrow a+۳ = ۱ \text{ یا } a+۳ = -۱$$

و این هم امکان‌پذیر نیست، پس هیچ مقداری برای a و b به‌دست نمی‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی‌های بخش‌پذیری) (متوسط)

۷- گزینه «۳» ـ می‌دانیم به ازای هر عدد صحیح a، $a \mid ۰$، بنابراین وقتی این رابطه به‌ازای هر n برقرار است که $۲m^۳ - m^۲ - ۴m + ۳ = ۰$:

$$۲m^۳ - m^۲ - ۴m + ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{صدق می کنـد}]{m=۱} (m-۱)(۲m^۲ + m - ۳) = ۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۱)(۲m+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

بنابراین برای m فقط یک مقدار صحیح به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ویژگی‌های بخش‌پذیری) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$P + ۲۴ = (۲k-۱)(۲k+۱) \Rightarrow P + ۲۴ = ۴k^۲ - ۱ \Rightarrow P = ۴k^۲ - ۲۵ \Rightarrow P = (۲k-۵)(۲k+۵)$$

چون P عددی اول است و $۲k - ۵ < ۲k + ۵$، پس:

$$۲k - ۵ = ۱ \Rightarrow k = ۳$$

$$۲k + ۵ = P \xrightarrow{k=۳} P = ۱۱$$

پس فقط به‌ازای یک مقدارِ اول برای P شرایط مسئله برقرار است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ اعداد اول) (متوسط)

۹- گزینه «۳» ـ چون $۳^۴ + ۱ = ۸۲$، پس باید $۳^۴ + ۱ \mid ۳^n + ۱$. این رابطه زمانی برقرار است که $\frac{n}{۴}$ فرد باشد؛ یعنی:

$$\frac{n}{۴} = ۲k + ۱ \Rightarrow n = ۸k + ۴$$

چون n باید دو رقمی باشد، پس $۱۰ \leq n \leq ۹۹$؛ یعنی:

$$۱۰ \leq ۸k + ۴ \leq ۹۹ \Rightarrow ۱ \leq k \leq ۱۱$$

یعنی ۱۱ مقدار برای k و در نتیجه ۱۱ مقدار برای n به‌دست می‌آید. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ بخش‌پذیری ـ اتحادها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ـ ابتدا عددها را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۲۹۶ = ۲^۳ \times ۳۷, ۳۳۳ = ۳^۲ \times ۳۷ \Rightarrow (۲۹۶, ۳۳۳) = ۳۷$$

$$۲۸۸ = ۲^۵ \times ۳^۲, ۹۹۹ = ۳^۳ \times ۳۷ \Rightarrow (۲۸۸, ۹۹۹) = ۳^۲ = ۹$$

در نتیجه:

$$[(۲۹۶, ۳۳۳), (۲۸۸, ۹۹۹)] = [۳۷, ۹] = ۳۷ \times ۹ = ۳۳۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م و ک.م.م) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &((۲a, ۳a), [a^۲, ۲a^۳]) \\ &= (a\underbrace{(۲, ۳)}_{۱}, ۲a^۳) \quad (\text{چون } a^۲ \mid ۲a^۳) \\ &= (a, ۲a^۳) \quad (\text{چون } a \mid ۲a^۳) \\ &= a \end{aligned}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م و ک.م.م) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» ـ بنابر تعریف ب.م.م می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۳n^۲ - ۲n + ۶ \\ d \mid ۳n + ۵ \xrightarrow{\text{n در راست}} d \mid ۳n^۲ + ۵n \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم مـی کنیـم}} d \mid ۷n - ۶$$

در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۷n - ۶ \\ d \mid ۳n + ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid ۷(۳n+۵) - ۳(۷n-۶) \Rightarrow d \mid ۵۳$$

چون $d \neq ۱$، پس $d = ۵۳$. (سراسری خارج از کشور ـ ۹۹) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ ب.م.م) (دشوار)