

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» - چون a_1, a_2 و a_3 همان اعداد b_1, b_2 و b_3 ولی با ترتیب متفاوت هستند.

پس: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ و $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ است.

عبارت $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ و $(a_1 - b_2)(a_2 - b_1)(a_3 - b_3)$ اگر بخواهند فرد باشند، هر سه پرانتز آن‌ها باید فرد باشد پس مجموع آن‌ها نیز فرد می‌شود که قطعا برابر صفر نیست.

غیرممکن $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) \neq 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \neq b_1 + b_2 + b_3$

غیرممکن $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) \neq 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \neq b_1 + b_2 + b_3$

چون $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3$ است. پس هر دو عدد $a_1 a_2 a_3$ و $b_1 b_2 b_3$ با هم زوج و یا با هم فرد هستند. بنابراین مجموع آن‌ها زوج است.

(کتاب درسی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - برهان خلف) (متوسط)

۲- گزینه «۲» - اگر عدد اول را k فرض کنیم عدد دوم $(k+2)$ است. یعنی $n = k(k+2)$

$$n+1 = k(k+2)+1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - استلال استنتاجی) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{aligned} a \mid 7k+3 \\ a \mid 9k-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \mid 9(7k+3) - 7(9k-2) \Rightarrow$$

$$a \mid 63k + 27 - 63k + 14 \Rightarrow a \mid 41 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \begin{cases} a=1 \\ a=41 \end{cases}$$

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - عاد کردن) (آسان)

۴- گزینه «۲» -

$$\Delta x + 4y = xy + 2 \Rightarrow \Delta x - 3 = xy - 4y \Rightarrow y = \frac{\Delta x - 3}{x - 4}$$

$$\left. \begin{aligned} x-4 \mid \Delta x-3 \\ x-4 \mid x-4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x-4 \mid \Delta x-3 - \Delta(x-4) \Rightarrow$$

$$x-4 \mid \Delta x-3 - \Delta x + 20 \Rightarrow x-4 \mid 17 \Rightarrow x-4 \in \{\pm 1, \pm 17\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-13, 3, 5, 21\} \Rightarrow y \in \{4, -12, 22, 6\}$$

نقاط به‌دست آمده $(-13, 4), (3, -12), (5, 22), (21, 6)$ است که تنها دو نقطه

وجود دارد که هر دو مؤلفه X و Y آن طبیعی است.

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - عاد کردن) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\left. \begin{aligned} 7 \mid \Delta x + 3 \Rightarrow 7 \mid (\Delta x + 3)^2 \Rightarrow 49 \mid 2\Delta x^2 + 30x + 9 \\ 7 \mid (\Delta x + 3) \Rightarrow 49 \mid 3\Delta x + 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 49 \mid 2\Delta x^2 + 6\Delta x + 30$$

در نتیجه: $m = 65$

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - عاد کردن) (متوسط)

۶- گزینه «۴» - اگر $(a, b) = d$ آن‌گاه $a = a'd, b = b'd$ که $(a', b') = 1$:

$$a+b+(a, b) = 216 \Rightarrow a'd + b'd + d = 216 \Rightarrow d(a' + b' + 1) =$$

$$1 \times 216 = 2 \times 108 = 3 \times 72 = 4 \times 54 = 6 \times 36 = 8 \times 27 = 9 \times 24 = 12 \times 18$$

از آنجا که $10 \leq d \leq 14$ است. پس $d = 12$ و $a' + b' + 1 = 18$ است.

$$a' + b' = 17 \Rightarrow \begin{array}{c|cccccccc} a' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline b' & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{array}$$

بنابراین ۸ حالت ممکن است.

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - ک.م.م و ب.م.م) (دشوار)

۷- گزینه «۳» -

$$(n+3, 13) = 1$$

چون عدد ۱۳ اول است، پس $(n+3)$ مضرب ۱۳ نیست.

$$n+3 = 13k \Rightarrow n = 13k - 3$$

$$n < 200 \Rightarrow 13k - 3 < 200 \Rightarrow k < \frac{203}{13} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

بنابراین در ۱۵ حالت $(n+3)$ مضرب ۱۳ می‌شود پس $15 - 1 = 14$

$$(n+3, 13) = 1$$

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - ب.م.م) (متوسط)

۸- گزینه «۱» - اگر $d = (7n+2, 11n-1)$ باشد باید $d \neq 1$ باشد.

$$\left. \begin{aligned} d \mid 7n+2 \\ d \mid 11(7n+2) - 7(11n-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid 77n + 22 - 77n + 7 \Rightarrow$$

$$d \mid 29 \xrightarrow{d \neq 1} d = 29$$

$$\left. \begin{aligned} 29 \mid 7n+2 \\ 29 \mid 11n-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 29 \mid 2(11n-1) - 2(7n+2) \Rightarrow 29 \mid 22n - 2 - 14n - 4$$

$$\Rightarrow 29 \mid n - 8 \Rightarrow n - 8 = 29k \Rightarrow n = 29k + 8$$

$$10 \leq 29k + 8 < 100 \Rightarrow 2 \leq 29k < 92 \Rightarrow 0 \leq k < \frac{92}{29} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\}$$

(فرهمنند) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - ترکیب عاد کردن و ب.م.م) (دشوار)