ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ـ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: از $a \mid b^n$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ مثال نقض: $4 \mid 2^5$ که نمی‌توان $4 \mid 2$ را نتیجه گرفت.

گزینه «۳»: از $a < b$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a^2 < b^2$ مثال نقض: $-3 < 2$ که نمی‌توان $9 < 4$ را نتیجه گرفت.

گزینه «۴»: از $a < b$ نمی‌توان نتیجه گرفت $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ مثال نقض: $-3 < 2$ که نمی‌توان $\frac{-1}{3} > \frac{1}{2}$ را نتیجه گرفت.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab-ac-bc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab+2ac+2bc \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab+2ac+2bc \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bc+c^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 \geq 0$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۳- گزینه «۴» ـ

$$3x-xy-2y+4=0 \Rightarrow 3x+4=y(x+2) \Rightarrow y=\frac{3x+4}{x+2}$$

$$\begin{cases} x+2 \mid 3x+4 \\ x+2 \mid x+2 \end{cases} \Rightarrow x+2 \mid 3x+4-3(x+2) \Rightarrow x+2 \mid -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=-1 \\ x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

هیچ‌یک از مقادیر x طبیعی نیست بنابراین هیچ نقطه‌ای با مختصات طبیعی روی منحنی وجود ندارد.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ

$$3 \mid n+2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 9 \mid (n+2)^2 \Rightarrow 9 \mid n^2+4n+4$$
$$3 \mid n+2 \xrightarrow{\times 3} 9 \mid 3n+6$$

$$\Rightarrow 9 \mid n^2+4n+4-(3n+6) \Rightarrow 9 \mid n^2+n-2 \Rightarrow k=-2$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۵- گزینه «۳» ـ نکته: نتیجه‌گیری به صورت $a^n \mid b^m \Rightarrow a^{n'} \mid b^{m'}$ زمانی درست است که $nm' \geq mn'$.

در مورد گزینه «۳»:

$$a^3 \mid b^2 \not\Rightarrow a^2 \mid b$$
$$3 \times 1 \not\geq 2 \times 2$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ

$$\begin{cases} d \mid 3n^2-2n+6 \\ d \mid 2n-4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 2(3n^2-2n+6)-3n(2n-4) \Rightarrow d \mid 8n+12$$

$$\begin{cases} d \mid 8n+12 \\ d \mid 2n-4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 8n+12-4(2n-4) \Rightarrow d \mid 28 \Rightarrow d=1,2,4,7,14,28$$

اعداد اولی که هر دو عدد را عاد می‌کنند ۲ و ۷ هستند.

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۷- گزینه «۱» ـ باید a طوری حساب شود که $d \mid \pm 1$

$$(5n+2, 3n+a)=d$$

$$\begin{cases} d \mid 5n+2 \\ d \mid 3n+a \end{cases} \Rightarrow d \mid 3(5n+2)-5(3n+a) \Rightarrow d \mid -5a+6$$

$$-5a+6=1 \Rightarrow a=1$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)

۸- گزینه «۴» ـ

$$x^2-y^2=P \Rightarrow \underbrace{(x-y)}_{1}\underbrace{(x+y)}_{P}=P$$

$\Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow$ x و y دو عدد متوالی هستند

$$[x, y]=[y+1, y]=y(y+1)=y^2+y$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول) (متوسط)