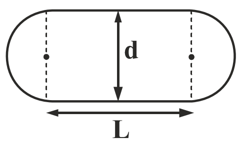
ریاضی ۲



۱- گزینه «۲» ــ فاصله دو خط داده شده از هم، همان عرض مستطیل و قطر نیم دایره است:

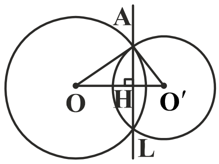
$$d=\frac{|۳+۷|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱$$

و فاصله مراکز دو نیم‌دایره، همان طول مستطیل است:

$$L=\sqrt{۴^۲+(۱+۲)^۲}=۵ \Rightarrow S=Ld+\pi(\frac{d}{۲})^۲=۱\times۵+۳\times\frac{۱}{۴}=\frac{۲۳}{۴}$$

(جعفری) (فصل اول ــ درس اول ــ فاصله دو نقطه، فاصله نقطه از خط)

۲- گزینه «۲» ــ



$$OH=\frac{|-۴-۳-۶|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{قضـــیه فیثـــاغورس در } \overset{\Delta}{OAH}} AH=\sqrt{۴^۲-(\sqrt{۱۳})^۲}=\sqrt{۳}$$

$$O'H=\frac{|۱۴+۹-۶|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۱۳}}\xrightarrow{\text{قضـــیه فیثـــاغورس در } \overset{\Delta}{O'AH}} O'A=\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+(\frac{۷}{\sqrt{۱۳}})^۲}=\sqrt{۳+\frac{۴۹}{۱۳}}=\sqrt{\frac{۸۸}{۱۳}}=\frac{\sqrt{۸۸}\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

(جعفری) (فصل اول ــ درس اول ــ فاصله دو نقطه، فاصله نقطه از خط)

۳- گزینه «۳» ــ

$$۴x-۵y+۳=۰ \Rightarrow m=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{قطرها برهم عمودنـــد}} m'=-\frac{۵}{۴}$$

از آن‌جا که نقطه $(۱,۲)$ در معادله $۴x-۵y+۳=۰$ صدق نمی‌کند، پس روی قطر دیگر لوزی قرار دارد. حال می‌توانیم معادله قطر دیگر لوزی را به‌دست آوریم:

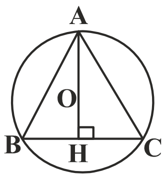
$$y-۲=-\frac{۵}{۴}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۳}{۴}$$

محل برخورد قطرهای لوزی، مرکز لوزی است.

$$\begin{cases}۴x-۵y+۳=۰\\ y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۳}{۴}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{۵۳}{۴۱}$$

(جعفری) (فصل اول ــ درس اول ــ خطوط عمود)

۴- گزینه «۱» ــ



$$OA=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲+۴)^۲}=۲$$

$$\xrightarrow{OA=OC} OC=\sqrt{(x-۳)^۲+(y+۴)^۲}=۲ \quad (۱)$$

مرکز دایره همان محل برخورد میانه‌های مثلث است. بنابراین:

$$AH=\frac{۳}{۲}OA=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

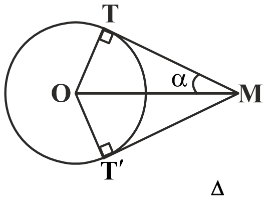
اگر طول ضلع مثلث را a درنظر بگیریم، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^۲=HC^۲+AH^۲ \Rightarrow a^۲-(\frac{a}{۲})^۲=۹ \Rightarrow a=\sqrt{۱۲} \Rightarrow AC=\sqrt{(x-۳)^۲+(y+۲)^۲}=\sqrt{۱۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=(x-۳)^۲+(y+۴)^۲+۸ \Rightarrow y=-۵ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}+۳$$

(جعفری) (فصل اول ــ درس اول ــ فاصله دو نقطه)

۵- گزینه «۴» ــ

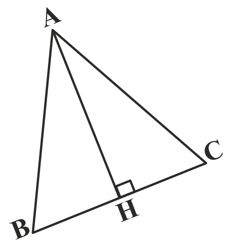


$$OT=\sqrt{(۱-۳)^۲+(\sqrt{۸}+۴-۴)^۲}=\sqrt{۴+۸}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$OM=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۸-۴)^۲}=۴$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{OMT} \text{ قائم الزاویـــه اســت}} Sin\alpha=\frac{OT}{OM}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha=۶۰^\circ \Rightarrow T\hat{M}T'=۲\alpha=۱۲۰^\circ$$

(جعفری) (فصل اول ــ فاصله دو نقطه)



۶- گزینه «۳» ـ نقطه B روی خط $x-y-۸=۰$ است، پس:

$$x-y-۸=۰ \xrightarrow{x_B=۳} y_B=-۵ \Rightarrow B(۳,-۵)$$

$$AH=\frac{|۳+۱-۸|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

$$AB=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۱+۵)^۲}=۴ \Rightarrow \operatorname{Sin}\hat{B}=\frac{AH}{AB}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow B=۴۵^\circ$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله دو نقطه، فاصله نقطه تا خط)

۷- گزینه «۳» ـ دهانه سهمی رو به پایین است، پس: $a<۰$. یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است، یعنی ضرب ریشه‌ها منفی است، پس:

$$P<۰ \Rightarrow \frac{c}{a}<۰ \xrightarrow{a<۰} c>۰$$

مقدار عددی ریشه مثبت از ریشه منفی بزرگ‌تر است، یعنی مجموع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$S>۰ \Rightarrow \frac{-b}{a}>۰ \Rightarrow \frac{b}{a}<۰ \xrightarrow{a<۰} b>۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۸- گزینه «۴» ـ

$\Delta=(۴\sqrt{۲})^۲-۴(\sqrt{۳})(-۶)>۰ \Rightarrow$ دارای دو ریشه متمایز است. $\Rightarrow$ گزینه «۳» رد می‌شود.

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}<۰ \Rightarrow$ مجموع ریشه ها منفی است. $\Rightarrow$ گزینه «۱» رد می‌شود.

$P=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{\sqrt{۳}}<۰ \Rightarrow$ حاصل ضرب ریشه ها منفی است. $\Rightarrow$ گزینه «۲» رد می‌شود.

بنابراین تنها گزینه‌ای که هر سه شرط را دارد، گزینه «۴» است. (جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۹- گزینه «۴» ـ با توجه به شکل طول رأس سهمی ۴ است، بنابراین باید $-\frac{b}{۲a}=۴$ باشد. گزینه‌های «۳» و «۴» این ویژگی را دارند. اما در گزینه «۱»، $\frac{-b}{۲a}=۲$ و در گزینه «۲»، $-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$ پس این گزینه‌ها رد می‌شود. هم‌چنین با توجه به شکل، تابع دارای دو ریشه است. بنابراین تابع گزینه «۳»، به دلیل این‌که ریشه ندارد، ($\Delta=۶۴-۴(-۱)(-۵۱)<۰$) رد می‌شود و فقط گزینه «۴» دارای تمام شروط لازم است.

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۰- گزینه «۱» ـ اگر β ریشه دیگر معادله باشد آنگاه:

$$\frac{۲}{۵}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۵}+\beta}{۲} \Rightarrow \beta=\frac{۴}{۵}-\frac{۲-\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۲+\sqrt{۵}}{۵}$$

$$S=\frac{۲-\sqrt{۵}}{۵}+\frac{۲+\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۴}{۵}\,,\,P=\frac{۲+\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۲-\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۴-۵}{۲۵}=-\frac{۱}{۲۵} \Rightarrow y=x^۲-\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۲۵} \xrightarrow{x=۱} y=۱-\frac{۴}{۵}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۴}{۲۵}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۱- گزینه «۳» ـ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله باشد و $\alpha=۳\beta$.

$$S=\alpha+\beta=۳\beta+\beta=۴\beta \xrightarrow{S=\frac{-b}{a}} ۴\beta=\frac{-b}{a}\ (۱)$$

$$P=\alpha\beta=۳\beta\times\beta=۳\beta^۲ \xrightarrow{P=\frac{c}{a}} ۳\beta^۲=\frac{c}{a}\ (۲)$$

$$\xrightarrow{\frac{(۲)}{(۱)}} \frac{۳\beta^۲}{۴\beta}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{-b}{a}} \Rightarrow \beta=-\frac{۴}{۳}\frac{c}{b}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۲- گزینه «۱» ـ در دو حالت معادله $ax^۴+۳x^۲+۱=۰$ دارای ریشه نخواهد بود.

$$ax^۴+۳x^۲+۱=۰ \xrightarrow{x^۲=t} at^۲+۳t+۱=۰$$

۱) چنان‌چه دلتای معادله $at^۲+۳t+۱=۰$ نامنفی(تا شامل $\Delta=۰$ هم شود) اما ریشه‌هایش منفی باشند، در این صورت $P>۰$ و $S<۰$ خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases}\Delta=۹-۴a\geq۰ \Rightarrow a\leq\frac{۹}{۴} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{a} \xrightarrow{P>۰} \frac{۱}{a}>۰ \Rightarrow a>۰ \qquad \Rightarrow ۰<a\leq\frac{۹}{۴}\ (۱) \\ S=-\frac{b}{a}=\frac{-۳}{a} \xrightarrow{S<۰} -\frac{۳}{a}<۰ \Rightarrow a>۰\end{cases}$$

۲) چنان‌چه دلتای معادله منفی باشد:

$$\Delta<۰ \Rightarrow a>\frac{۹}{۴}\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} a>۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$y = mx^{۲} + (m-۲)x + n \xrightarrow{(۰,۳)} m(۰)^{۲} + (m-۲)(۰) + n = ۳ \Rightarrow n = ۳$$

همچنین دلتای معادله برخورد سهمی و خط $y = ۲$، صفر است. بنابراین:

$$mx^{۲} + (m-۲)x + ۳ = ۲ \Rightarrow mx^{۲} + (m-۲)x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} (m-۲)^{۲} - ۴(m)(۱) = ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۸m + ۴ = ۰$$

$\Rightarrow m = ۴ \pm \sqrt{۱۲}$ با توجه بـه شـرط $m > ۰$ هر دو جواب قابـل قبـول هسـتند. $\Rightarrow m + n = ۷ \pm \sqrt{۱۲}$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم)

۱۴- گزینه «۳» ـ نقطه $(۲- , ۰)$ در تابع سهمی صدق می‌کند. بنابراین:

$$a(۰)^{۲} + b(۰) + c = -۲ \Rightarrow c = -۲$$

هم‌چنین تابع دارای یک ریشه مضاعف است. پس $\Delta = ۰$ در نتیجه:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۰ \xrightarrow{c=-۲} b^{۲} + ۸a = ۰ \Rightarrow b = \pm ۲\sqrt{-۲a}$$

طول رأس سهمی برابر است با:

$$x = \frac{-b}{۲a} \xrightarrow{b = \pm ۲\sqrt{-۲a}} x = \pm \frac{۲\sqrt{-۲a}}{۲a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-۲}{a}}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ نمودار تابع درجه دوم)

۱۵- گزینه «۲» ـ روش اول: اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{۴}{۴} = ۱ , P = \alpha\beta = \frac{۱}{۴}\sin^{۲} ۲a$$

با توجه به این‌که:

$$\alpha\beta = \frac{۱}{۴}\sin^{۲} ۲a = (\frac{۱}{۲}\sin ۲a)^{۲} = (\sin a \cos a)^{۲} = \sin^{۲} a \cos^{۲} a$$

و:

$$\alpha + \beta = ۱ = \sin^{۲} a + \cos^{۲} a$$

می‌توان نتیجه گرفت $\alpha = \sin^{۲} a$ و $\beta = \cos^{۲} a$ است. پس $\frac{\alpha}{\beta} = \tan^{۲} a$ یا $\frac{\beta}{\alpha} = \cot^{۲} a$.

روش دوم:

$$۴x^{۲} - ۴x + \sin^{۲} ۲a = ۰ \Rightarrow \Delta' = ۴ - ۴\sin^{۲} ۲a = ۴\cos^{۲} ۲a \Rightarrow \alpha , \beta = \frac{۲ \pm ۲\cos ۲a}{۴} = \frac{۱ \pm \cos ۲a}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{۱-\cos ۲a}{۲}}{\frac{۱+\cos ۲a}{۲}} = \frac{۱-\cos ۲a}{۱+\cos ۲a} = \frac{۱ + ۲\sin^{۲} a - ۱}{۱ - ۱ + ۲\cos^{۲} a} = \frac{\sin^{۲} a}{\cos^{۲} a} = \tan^{۲} a , \frac{\beta}{\alpha} = \cot^{۲} a$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۶- گزینه «۴» ـ با توجه به شکل طول نقطه رأس $f(x)$، ریشه $g(x)$ است. بنابراین:

$$f(x) = -۲x^{۲} + ۳x - ۱ \Rightarrow x_S = \frac{۳}{۴} \text{ طول رأس سهمی } f$$

$$\xrightarrow{x_S \text{ ریشه } g(x) \text{ است}} -۲(\frac{۳}{۴})^{۲} + b(\frac{۳}{۴}) + c = ۰ \Rightarrow -\frac{۹}{۸} + \frac{۳}{۴}b + c = ۰ \ (۱)$$

از طرف دیگر ریشه کوچک‌تر تابع $f(x)$، طول رأس سهمی $g(x)$ است. بنابراین:

$$\xrightarrow{f(x)=۰} -۲x^{۲} + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} , x = ۱ \xrightarrow{\text{ریشه کوچک‌تر}} x = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{طول رأس سهمی } g(x) = \frac{b}{۴} \xrightarrow{\frac{۱}{۲} \text{ طول رأس سهمی } g(x) \text{ است}} \frac{b}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۲$$

$$\xrightarrow{(۱)} -\frac{۹}{۸} + \frac{۳}{۴} \times ۲ + c = ۰ \Rightarrow c = -\frac{۳}{۸} \Rightarrow b + c = ۲ - \frac{۳}{۸} = \frac{۱۳}{۸}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ رأس سهمی)

۱۷- گزینه «۱» ـ می‌دانیم در تابع $y = ax^{۲} + bx + c$، مقدار بیشینه y از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$y_{max} = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$$

بنابراین اگر ارتفاع اوج نصف شود، داریم:

$$\frac{h'_{max}}{h_{max}} = \frac{\frac{-V_{۰}'^{۲}}{۴(\frac{۱}{۲}g)}}{\frac{-V_{۰}^{۲}}{۴(\frac{۱}{۲}g)}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (\frac{V'_{۰}}{V_{۰}})^{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow V'_{۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}V_{۰}$$

بنابراین مقداری که باید از سرعت کم شود، برابر است با:

$$V_{۰} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}V_{۰} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}V_{۰}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ رأس سهمی)

۱۸- گزینه «۲» ـ اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+۱=۰$ باشند، داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\,,\ P=\alpha\beta=\frac{۱}{a}$$

حال اگر به ریشه‌ها ۲ واحد اضافه شود، داریم:

$$S'=(\alpha+۲)+(\beta+۲)=\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+۴=\frac{۴a-b}{a}$$

$$P'=(\alpha+۲)(\beta+۲)=\underbrace{\alpha\beta}_{P}+۲(\underbrace{\alpha+\beta}_{S})+۴=\frac{۱}{a}-\frac{۲b}{a}+۴=\frac{۱-۲b+۴a}{a}$$

بنابراین معادله جدید برابر است با:

$$x^۲-S'x+P'=۰\ \Rightarrow\ x^۲-(\frac{۴a-b}{a})x+\frac{۱-۲b+۴a}{a}=۰\ \xrightarrow{\times a}\ ax^۲+(b-۴a)x+۱-۲b+۴a=۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۱۹- گزینه «۴» ـ

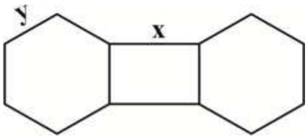
$$۲\alpha^۳+۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^۳+\alpha^۳+\beta^۳-\beta^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲=(\alpha^۳+\beta^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲)+(\alpha^۳-\beta^۳)\ \Rightarrow$$

$$(\underbrace{\alpha+\beta}_{S})^۳+(\underbrace{\alpha-\beta}_{\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{a}})(\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲}_{S^۲-۲P}+\underbrace{\alpha\beta}_{P})=S^۳\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{a}(S^۲-P)$$

نکته: تفاضل ریشه‌ها از فرمول $\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ به دست می‌آید. (جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$P=۱۲y+۲x\ \xrightarrow{۱۲}\ ۱۲y+۲x=۱۲\ \Rightarrow\ x=۶-۶y\ (*)$$



$$S_{\text{شکل}}=xy+۲(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}y^۲)\ \xrightarrow{\text{با توجه به}(*)}\ S=(۳\sqrt{۳}-۶)y^۲+۶y$$

$$y_{max}=-\frac{۶}{۲(۳\sqrt{۳}-۶)}=\sqrt{۳}+۲$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ ماکزیمم و می‌نیمم سهمی)