ریاضی ۲

۱- گزینه «۳» ـ در ناحیه سوم طول و عرض نقطه باید منفی باشد:

$$2m+1<0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2} \quad (I)$$

$$m^2-m-2<0 \Rightarrow -1<m<2 \quad (II)$$

$$(I)\cap(II) \Rightarrow -1<m<-\frac{1}{2}$$

m		-1		2	
m^2-m-2	$+$	0	$-$	0	$+$
			ج		

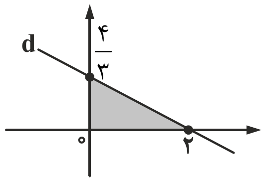
(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ یادآوری و تکمیل معادله خط) (آسان)

۲- گزینه «۴» ـ

$$\frac{y-1}{3}=\frac{x}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+1 \Rightarrow m_1=\frac{3}{2} \text{ شیب خط}$$

$$m_2=\frac{-1}{m_1} \text{ شرط عمود بودن} \Rightarrow m_2=\frac{-2}{3}$$

$$\text{خط } d: y-2=\frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow y=\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3}$$



$$\begin{vmatrix} x=0 \\ y=\frac{4}{3} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x=2 \\ y=0 \end{vmatrix}$$

$$\text{مساحت مثلث } S=\frac{2\times\frac{4}{3}}{2}=\frac{4}{3}$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ یادآوری، معادله خط) (متوسط)

۳- گزینه «۲» ـ خطوط اضلاع مثلث را ۲ به ۲ با هم در نظر می‌گیریم و نقطه تلاقی دو خط که رأس مثلث است به‌دست آورید:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=1 \quad A(1,1)$$

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=5 \quad B(5,5)$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{2}, y=0 \quad C(\frac{5}{2},0)$$

$$\text{مثلث } S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

$$\text{مثلث } S=\frac{1}{2}|1(5-0)+5(0-1)+\frac{5}{2}(1-5)| \Rightarrow S=5$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ مساحت مثلث) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ روش اول:

وسط پاره‌خط $M\left|\begin{array}{l} x=\frac{۲+۴}{۲}=۳ \\ y=\frac{۰+۶}{۲}=۳ \end{array}\right.$

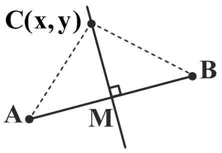
شیب AB: $m=\frac{۶-۰}{۴-۲}=۳$

شیب خط عمودمنصف: $m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۱}{۳}$

$$y-۳=\frac{-۱}{۳}(x-۳) \Rightarrow ۳y-۹=-x+۳ \Rightarrow ۳y+x=۱۲$$

با امتحان گزینه‌ها، نقطه $(۱۵,-۱)$ بر روی خط عمودمنصف قرار دارد.

روش دوم: فاصله هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است:



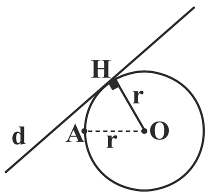
$$AC=BC$$

$$(x-۲)^۲+y^۲=(x-۴)^۲+(y-۶)^۲$$

معادله عمودمنصف $x^۲-۴x+۴+y^۲=x^۲-۸x+۱۶+y^۲-۱۲y+۳۶ \Rightarrow ۱۲y+۴x=۴۸ \Rightarrow ۳y+x=۱۲$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ نوشتن معادله خط) (آسان)

۵- گزینه «۳» ـ



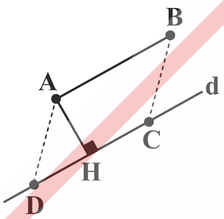
شعاع $r=OH=\frac{|۳(۳)-۴(-۱)+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$

پس نقطه روی دایره با مرکز فاصله ۳ واحدی دارد؛ یعنی با امتحان گزینه‌ها داریم:

$$A\left|\begin{array}{l} ۰ \\ -۱ \end{array}\right. \Rightarrow OA=۳ \Rightarrow \sqrt{(۳-۰)^۲+(-۱+۱)^۲}=۳$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ



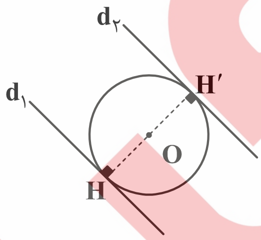
$$AH=\frac{|۲(۲)-۳-۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$AB=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$S=AH\times AB \Rightarrow S=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\sqrt{۵}=۲$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی ـ فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازیند.



$$۲x+y-۵=۰$$

$$۴x+۲y=۱ \Rightarrow ۲x+y-\frac{۱}{۲}=۰$$

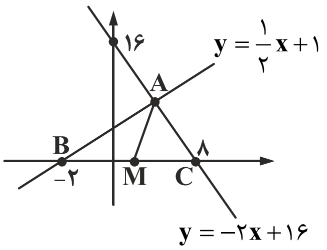
$$HH'=\frac{|C_۱-C_۲|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۵+\frac{۱}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}}$$

قطر دایره $HH'=\frac{\frac{۹}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{۹\sqrt{۵}}{۱۰}$

محیط دایره $=\frac{۹\sqrt{۵}}{۱۰}\pi$

(کتاب همراه علوی) (هندسه تحلیلی ـ فاصله دو خط موازی) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ



$y=0: y+2x=16 \Rightarrow x=8 \quad C(8,0)$

$y=0: 2y-x=2 \Rightarrow x=-2 \quad B(-2,0)$

وسط پاره‌خط BC M $\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{8+(-2)}{2}=3 \\ y=\dfrac{0+0}{2}=0 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} y=-2x+16 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Rightarrow y_1=y_2 \Rightarrow -2x+16=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow -\frac{5}{2}x=-15 \Rightarrow x=6, y=4 \Rightarrow A(6,4)$$

$$AM=\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=5$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۹) (هندسه تحلیلی ـ فاصله دو نقطه (طول پاره‌خط)) (دشوار)

۹- گزینه «۳» ـ

$\Delta>0: 36-4(2m-1)(m-2)>0$

$9-(2m^2-4m-m+2)>0$

$-2m^2+5m+7>0$

$2m^2-5m-7<0$

m		-1		$\frac{7}{2}$	
$2m^2-5m-7$	+	0	−	0	+
			ج		

$-1<m<\frac{7}{2}$

(سراسری داخل کشور ریاضی ـ ۹۸) (معادله درجه دوم ـ وجود ریشه در معادله درجه دوم) (آسان)

۱۰- گزینه «۴» ـ

$\Delta>0: (m-1)^2-4(m+2)>0 \Rightarrow m^2-2m+1-4m-8>0$

$m^2-6m-7>0$

رابطه (I): $m<-1 \cup m>7$

رابطه (II): $P>0: \frac{c}{a}>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2$

رابطه (III): $S>0: \frac{-b}{a}>0 \Rightarrow -(m-1)>0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1$

$(I)\cap(II)\cap(III) \Rightarrow -2<m<-1$

m		-1		7	
	+	0	−	0	+
	ج				ج

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ وجود ریشه حقیقی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» ـ

$$S=\frac{m+2}{\frac{m}{3}}=\frac{3(m+2)}{m}, \; P=\frac{m-4}{\frac{m}{3}}=\frac{3(m-4)}{m}$$

$$\alpha^2+\beta^2=27 \Rightarrow S^2-2P=27 \Rightarrow \frac{9(m+2)^2}{m^2}-\frac{6(m-4)}{m}=27$$

$$9(m^2+4m+4)-6m(m-4)=27m^2$$

$$9m^2+36m+36-6m^2+24m=27m^2 \Rightarrow 24m^2-60m-36=0$$

$$2m^2-5m-3=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{2}: -\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\Delta=\frac{9}{4}-4(-\frac{1}{6})(-\frac{9}{2})=\frac{9}{4}$$

$\Delta=-\frac{3}{4}<0$ غ ق ق

$m=3: x^2-5x-1=0 \Rightarrow \Delta=25+4=29>0$

فقط $m=3$ قابل قبول است.

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$x^۲-۲x-۱=\circ : S=\alpha+\beta=۲\ ,\ P=\alpha\cdot\beta=-۱$

ریشه اول معادله جدید : $x_۱=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P=۴-۲(-۱)=۶$

ریشه دوم معادله جدید : $x_۲=\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta\cdot(\alpha+\beta)=P\cdot S=(-۱)(۲)=-۲$

$S_۱=x_۱+x_۲=۶+(-۲)=۴$

$P_۱=x_۱\times x_۲=۶(-۲)=-۱۲$

$x^۲-S_۱x+P_۱=\circ\Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=\circ$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$x^۲-۳x+۱=\circ \quad S=۳$

صدق ریشه در معادله : $x=\alpha\Rightarrow\alpha^۲-۳\alpha+۱=\circ\Rightarrow\alpha^۲=۳\alpha-۱$

$\sqrt[۳]{\alpha^۲+۳\beta}=\sqrt[۳]{۳\alpha-۱+۳\beta}=\sqrt[۳]{۳S-۱}=\sqrt[۳]{۹-۱}=۲$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ـ صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادله $mx^۲+۳x+m^۲-۲=\circ$ است، پس شرط معکوس بـودن ریشـه‌هـا $a=c$ و $\Delta>\circ$ است.

$mx^۲+۳x+m^۲-۲=\circ$

$$m=m^۲-۲\Rightarrow m^۲-m-۲=\circ\Rightarrow\begin{cases}m=-۱:-x^۲+۳x-۱=\circ\Rightarrow\Delta=۹-۴\Rightarrow\Delta>\circ\checkmark\\ m=۲:۲x^۲+۳x+۲=\circ\Rightarrow\Delta=۹-۱۶<\circ\ \text{بدون ریشـــه (غ ق ق)}\end{cases}$$

$m=-۱:-x^۲+۳x-۱=\circ$

مجموع ریشه‌ها : $x_۱+x_۲=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-۳}{-۱}=۳$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ صفرهای تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» ـ گزینه «۱» صحیح است، چون نمودار درجه دوم رأس آن به‌صورت ماکزیمم است، پس $a<\circ$ و محل تلاقی منحنی با محــور yهــا در قسمت منفی است، پس $C<\circ$ می‌باشد و چون داریم:

(رأس) $x_{max}=\dfrac{-b}{۲a}<\circ\xrightarrow{a<\circ}-b>\circ\Rightarrow b<\circ$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ علامت ضرایب نمودار سهمی) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$x^۲-x-۳=\circ\Rightarrow S=۱,P=-۳$

$A=\alpha^۳\beta^۳+\alpha^۲+\beta^۲+\dfrac{۱}{\alpha\beta}=P^۳+(S^۲-۲P)+\dfrac{۱}{P}$

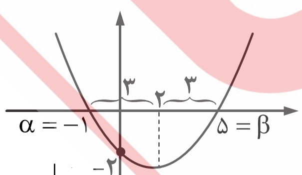
$A=(-۳)^۳+(۱^۲-۲(-۳))+\dfrac{۱}{-۳}=-۲۷+(۷)-\dfrac{۱}{۳}=-۲\circ-\dfrac{۱}{۳}=\dfrac{-۶۱}{۳}$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» ـ نکته: اگر α و β صفرهای تابع سهمی $f(x)$ باشند، داریم:

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

نکته: $x=-\dfrac{b}{۲a}$ (طول رأس سهمی) معادله محور تقارن سهمی است.



$\alpha=-۱,\beta=۵$

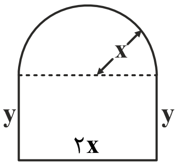
$f(x)=a(x+۱)(x-۵)$

نقطه $\begin{vmatrix}\circ\\-۲\end{vmatrix}:-۲=a(۱)(-۵)\Rightarrow a=\dfrac{۲}{۵}$

$f(x)=\dfrac{۲}{۵}(x+۱)(x-۵)\Rightarrow f(-\dfrac{۴}{۳})=\dfrac{۲}{۵}(-\dfrac{۴}{۳}+۱)(-\dfrac{۴}{۳}-۵)=\dfrac{۲}{۵}(-\dfrac{۱}{۳})(\dfrac{-۱۹}{۳})=\dfrac{۳۸}{۴۵}$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ تعیین ضابطه نمودار) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ



$۲y+۲x+\pi x=۶$: محیط پنجره

$\xrightarrow{\pi\simeq ۳} ۲y=-۵x+۶ \Rightarrow y=\frac{-۵}{۲}x+۳$ (I) رابطه

برای این‌که بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید بیشترین مساحت را دارا باشد، پس:

مساحت $S=۲xy+\frac{\pi}{۲}x^۲ \xrightarrow{\pi=۳} S=۲x(-\frac{۵}{۲}x+۳)+\frac{۳}{۲}x^۲$

$$S=-۵x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow S=\frac{-۷}{۲}x^۲+۶x \Rightarrow x_{max}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲(-\frac{۷}{۲})}=\frac{۶}{۷} \xrightarrow[\text{قرار دهید}]{\text{در رابطه (I)}} y_{max}=\frac{-۵}{۲}(\frac{۶}{۷})+۳=\frac{-۱۵}{۷}+۳=\frac{۶}{۷}$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ ماکزیمم و مینیمم سهمی) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» ـ

$$x^۲-x=t: t^۲-۳t+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱\\ t=۲\end{cases}$$

$x^۲-x=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow \Delta=۵>۰$ دو ریشه حقیقی

$x^۲-x=۲\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow \Delta=۹>۰$ دو ریشه حقیقی

معادله ۴ ریشه حقیقی دارد. (کتاب همراه علوی) (معادله درجه دوم ـ تغییر متغیر و تبدیل به معادله درجه دوم) (آسان)

۲۰- گزینه «۴» ـ نکته: در معادله $ax^۴+bx^۲+c=۰$ با شرط وجود ریشه حقیقی همواره $S=۰$ (جمع ریشه‌ها) است.

$$\xrightarrow{x^۲=t} t^۲-۵t+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow x_۱=\pm\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}} \\ t=\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}} \end{cases}$$

$$۲SP^۲+\frac{S}{P}+۲P^۲ \overset{S=۰}{=} ۰+۰+۲(-(\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}})^۲\times(-(\frac{\sqrt{۵-\sqrt{۲۱}}}{۲})^۲))^۲=۲((\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲})(\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}))^۲=۲(\frac{۲۵-۲۱}{۴})^۲=۲$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ حل معادله دومجذوری) (دشوار)