

ریاضی ۲

۱- گزینه «۳» - در ناحیه سوم طول و عرض نقطه باید منفی باشد:

$$2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \quad (I)$$

$$m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

m	-1	2
$m^2 - m - 2$	+	-
	ع	

(میرزایی) (هندسه تحلیلی - یادآوری و تکمیل معادله خط) (آسان)

۲- گزینه «۴» -

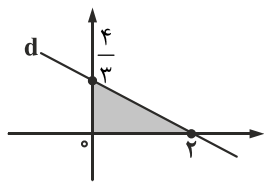
$$\frac{y-1}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

شیب خط

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \Rightarrow m_2 = \frac{-2}{3}$$

شرط عمود بودن

$$\text{خط } d: y - 2 = \frac{-2}{3}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3}$$



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

مساحت مثلث

(میرزایی) (هندسه تحلیلی - یادآوری، معادله خط) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - خطوط اضلاع مثلث را ۲ به ۲ با هم در نظر می‌گیریم و نقطه تلاقی دو خط که رأس مثلث است به دست آورید:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1 \quad A(1, 1)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 5 \quad B(5, 5)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{4}, y = 0 \quad C(\frac{5}{4}, 0)$$

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$S = \frac{1}{2} |1(5 - 0) + 5(0 - 1) + \frac{5}{4}(1 - 5)| \Rightarrow S = 5$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی - مساحت مثلث) (متوسط)

$$\text{وسط پاره خط } M \begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y = \frac{0+6}{2} = 3 \end{cases}$$

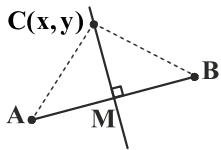
$$\text{شیب } AB \text{ } m = \frac{6-0}{4-2} = 3$$

$$\text{شیب خط عمودمنصف } m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3}$$

$$y - 3 = \frac{-1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 9 = -x + 2 \Rightarrow 3y + x = 12$$

با امتحان گزینه‌ها، نقطه $(15, -1)$ بر روی خط عمودمنصف قرار دارد.

روش دوم: فاصله هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک اندازه است:



$$AC = BC$$

$$(x-2)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 \Rightarrow 12y + 4x = 48 \Rightarrow 3y + x = 12$$

معادله عمودمنصف (میرزایی) (هندسه تحلیلی - نوشتن معادله خط) (آسان)

۵- گزینه «۳» -

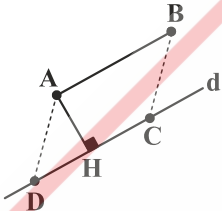
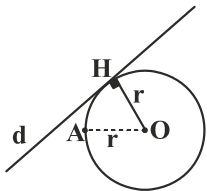
$$\text{شعاع } r = OH = \frac{|3(3) - 4(-1) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

پس نقطه روی دایره با مرکز فاصله ۳ واحدی دارد؛ یعنی با امتحان گزینه‌ها داریم:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow OA = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2 + (-1+1)^2} = 3$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۶- گزینه «۲» -



$$AH = \frac{|2(2) - 3 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$S = AH \times AB \Rightarrow S = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 2$$

(میرزایی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - دو خط d_1 و d_2 موازیند.

$$2x + y - 5 = 0$$

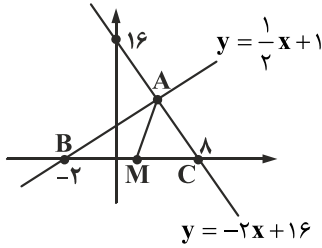
$$4x + 2y = 1 \Rightarrow 2x + y - \frac{1}{2} = 0$$

$$HH' = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 + \frac{1}{2}|}{\sqrt{4+1}}$$

$$\text{قطر دایره } HH' = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{محیط دایره} = \frac{9\sqrt{5}}{10} \pi$$

(کتاب همراه علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله دو خط موازی) (متوسط)



$$y = 0 : y + 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \quad C(8, 0)$$

$$y = 0 : 2y - x = 2 \Rightarrow x = -2 \quad B(-2, 0)$$

BC وسط پاره خط M

$$\begin{cases} x = \frac{8 + (-2)}{2} = 3 \\ y = \frac{0 + 0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 16 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow -2x + 16 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow -\frac{5}{2}x = -15 \Rightarrow x = 6, y = 4 \Rightarrow A(6, 4)$$

$$AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = 5$$

(سراسری خارج از کشور تجربی - ۹۹) هندسه تحلیلی - فاصله دو نقطه (طول پاره خط) (دشوار)

$$\Delta > 0 : 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$

$$9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$-2m^2 + 5m + 7 > 0$$

$$2m^2 - 5m - 7 < 0$$

		$\frac{y}{2}$		
m	-	-	+	+
$2m^2 - 5m - 7$	+	0	-	0
		ج	ج	
		$-1 < m < \frac{y}{2}$		

(سراسری داخل کشور ریاضی - ۹۸) معادله درجه دوم - وجود ریشه در معادله درجه دوم (آسان)

$$\Delta > 0 : (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m - 8 > 0$$

$$m^2 - 6m - 7 > 0$$

$$(I) \text{ رابطه } : m < -1 \cup m > 7$$

$$(II) \text{ رابطه } : P > 0 : \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$(III) \text{ رابطه } : S > 0 : \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow -(m-1) > 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow -2 < m < -1$$

		-	+	
m	-	+	-	+
		ج	ج	

(میرزایی) معادله درجه دوم - وجود ریشه حقیقی (متوسط)

$$S = \frac{m+2}{2} = \frac{2(m+2)}{4}, P = \frac{m-4}{2} = \frac{2(m-4)}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 27 \Rightarrow S^2 - 2P = 27 \Rightarrow \frac{9(m+2)^2}{4} - \frac{6(m-4)}{2} = 27$$

$$9(m^2 + 4m + 4) - 6m(m-4) = 27m^2$$

$$9m^2 + 36m + 36 - 6m^2 + 24m = 27m^2 \Rightarrow 24m^2 - 60m - 36 = 0$$

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} : -\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - 4\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\Delta = -\frac{3}{4} < 0 \text{ غ ق ق}$$

$$m = 3 : x^2 - 5x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 + 4 = 29 > 0$$

فقط $m = 3$ قابل قبول است.

(میرزایی) معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها (متوسط)

$$x^2 - 2x - 1 = 0 : S = \alpha + \beta = 2, P = \alpha \cdot \beta = -1$$

$$\text{ریشه اول معادله جدید} : x_1 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 4 - 2(-1) = 6$$

$$\text{ریشه دوم معادله جدید} : x_2 = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta \cdot (\alpha + \beta) = P \cdot S = (-1)(2) = -2$$

$$S_1 = x_1 + x_2 = 6 + (-2) = 4$$

$$P_1 = x_1 \times x_2 = 6(-2) = -12$$

$$x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad S = 3$$

$$\text{صدق ریشه در معادله} : x = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha - 1$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} = \sqrt{3\alpha - 1 + 2\beta} = \sqrt{3S - 1} = \sqrt{9 - 1} = 2$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» - صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ است. پس شرط معکوس بودن ریشه‌ها $a = c$ و $\Delta > 0$ است.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

$$m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 : -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \Rightarrow \Delta > 0 \checkmark \\ m = 2 : 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 16 < 0 \text{ بدون ریشه} \end{cases}$$

$$m = -1 : -x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} : x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - صفرهای تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۱» - گزینه «۱» صحیح است، چون نمودار درجه دوم رأس آن به صورت ماکزیمم است. پس $a < 0$ و محل تلاقی منحنی با محور y ها در قسمت منفی است. پس $C < 0$ می‌باشد و چون داریم:

$$\text{رأس} \quad x_{\max} = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - علامت ضرایب نمودار سهمی) (آسان)

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow S = 1, P = -3$$

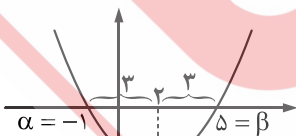
$$A = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha\beta} = P^2 + (S^2 - 2P) + \frac{1}{P}$$

$$A = (-3)^2 + (1^2 - 2(-3)) + \frac{1}{-3} = -27 + (7) - \frac{1}{3} = -20 - \frac{1}{3} = \frac{-61}{3}$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» - نکته: اگر α و β صفرهای تابع سهمی $f(x)$ باشند، داریم:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$



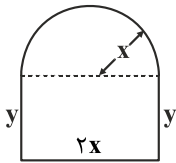
$$\alpha = -1, \beta = 5$$

$$f(x) = a(x + 1)(x - 5)$$

$$\text{نقطه} \quad \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} : -2 = a(1)(-5) \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = \frac{2}{5}(x + 1)(x - 5) \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5}\left(-\frac{4}{3} + 1\right)\left(-\frac{4}{3} - 5\right) = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{38}{45}$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - تعیین ضابطه نمودار) (متوسط)



محیط پنجره: $2y + 2x + \pi x = 6$

رابطه (I) $y = -\frac{5}{2}x + 3$ $\Rightarrow 2y = -5x + 6$

برای این که بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید بیشترین مساحت را دارا باشد، پس:

مساحت $S = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2 \xrightarrow{\pi=2} S = 2x(-\frac{5}{2}x + 3) + \frac{2}{2}x^2$

$S = -5x^2 + 6x + x^2 \Rightarrow S = -\frac{4}{2}x^2 + 6x \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{4}{2})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ در رابطه (I) قرار دهید. $y_{\max} = -\frac{5}{2}(\frac{3}{2}) + 3 = \frac{-15}{4} + 3 = \frac{-15}{4} + \frac{12}{4} = \frac{-3}{4}$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - ماکزیمم و مینیمم سهمی) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» -

$x^2 - x = t: t^2 - 2t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5 > 0$ دو ریشه حقیقی

$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ دو ریشه حقیقی

معادله ۴ ریشه حقیقی دارد. (کتاب همراه علوی) (معادله درجه دوم - تغییر متغیر و تبدیل به معادله درجه دوم) (آسان)

۲۰- گزینه «۴» - نکته: در معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ با شرط وجود ریشه حقیقی همواره $S = 0$ (جمع ریشه‌ها) است.

$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}} \\ t = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}} \end{cases}$

$2SP^2 + \frac{S}{P} + 2P^2 S = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 2(-\sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}})^2 \times (-\sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}})^2 = 2((\frac{5 + \sqrt{21}}{2})(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}))^2 = 2(\frac{25 - 21}{4})^2 = 2$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - حل معادله دومجذوری) (دشوار)