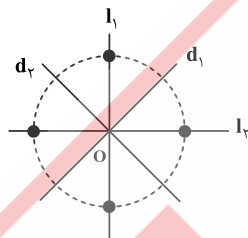


ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» - نقاطی که از دو خط متقاطع d_1, d_2 به یک فاصله هستند روی نیمسازهای

زاویه‌های حاصل از تقاطع آن‌ها قرار دارند. (خط‌های l_1, l_2)، نقاطی که از O به فاصله ۶ سانتی‌متر قرار دارند، محل تقاطع دایره‌ای به مرکز O با شعاع ۶ cm قرار دارند. محل تقاطع دایره با نیمسازها جواب مسئله است، پس ۴ جواب وجود دارد.



(گروه مولفان علوی) (هندسه - هندسه استدلالی) (متوسط)

۲- گزینه «۴» - B روی نیمساز زاویه A قرار دارد پس:

$$BH = BH'$$

$$x^2 = 2x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \text{ غ ق} \end{cases}$$

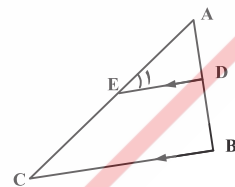
$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$400 = (16)^2 + AH^2 \Rightarrow AH = 12$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BH = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - نیمساز زاویه) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \text{مشترک} \\ DE \parallel BC \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE$$

پس:

$$\frac{AB}{AD} = k \text{ (نسبت تشابه)}$$

$$k = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = k^2 \Rightarrow S_{ABC} = (3/4)^2 S_{ABD}$$

$$S_{ABC} = 9/16 S_{ABD}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - تشابه دو مثلث) (متوسط)

۴- گزینه «۴» - بنا به قضیه تالس داریم (قضیه تعمیم تالس):

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+BD} = \frac{4}{12} = \frac{DE}{14}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{3+BD} = \frac{4}{12} \Rightarrow 3+BD=9 \Rightarrow BD=6 \\ \frac{DE}{14} = \frac{4}{12} \Rightarrow DE = \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$BDEC \text{ محیط چهار ضلعی } P = 6 + \frac{14}{3} + 8 + 14 = \frac{98}{3}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - قضیه تالس) (متوسط)

۵- گزینه «۴» -

$$\text{HCEF: } \frac{3x+4}{y} = \frac{4x+2}{6}$$

$$18x+24=28x+14 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

$$\text{ABDG: } \frac{x+2}{3x+4} = \frac{y+\frac{4}{y}}{4x+2} \xrightarrow{x=1} \frac{3}{y} = \frac{y+\frac{4}{y}}{6} \\ 6y+4=18 \Rightarrow y=2$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - قضیه تالس) (دشوار)

۶- گزینه «۲» -

$$\frac{P}{P'} = \frac{25}{15} = k \Rightarrow \text{نسبت تشابه } k = \frac{5}{3}$$

$$\frac{S}{S'} = k^2 \Rightarrow \frac{S}{27} = \frac{25}{9} \Rightarrow S = 27 \times \frac{25}{9} = 75$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - تشابه دو مثلث) (آسان)

۷- گزینه «۱» - در دو مثلث ABC و ADE داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \text{مشترک} \\ \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{4x+1} = \frac{1}{3} \\ 3x+1=3x+6 \Rightarrow x=5 \Rightarrow BC=4x+1=4(5)+1=21$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - تشابه دو مثلث) (متوسط)

۸- گزینه «۲» -

$$\Delta ABH: AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$144 = BH^2 + 36 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه:

$$36 = 6\sqrt{3} \times CH \Rightarrow CH = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

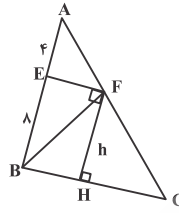
$$BC = BH + CH = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 192 = 144 + AC^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$AC + CH = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - روابط طولی) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - ارتفاع FH. هم ارتفاع مثلث BCF می باشد و هم ارتفاع مثلث BEF چون EF موازی BC است.



$$FH = h$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{4}{12}$$

$$EF = BC$$

$$\frac{S_{BCF}}{S_{BEF}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times h}{\frac{1}{2} \times EF \cdot h} \Rightarrow \frac{S_{BCF}}{S_{BEF}} = \frac{EF}{BC}$$

$$S_{BCF} = S_{BEF}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - تالیس) (دشوار)

۱۰- گزینه «۳» -

$$\frac{1}{x-1} : x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ ریشه مخرج}$$

$$\frac{x-3}{x} : x=0 \text{ ریشه مخرج}$$

$$2x + \frac{x-3}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 3}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ ریشه های مخرج}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \text{ریشه های مخرج} \}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, 1, -\frac{3}{2}\} \Rightarrow A = \{0, 1, -\frac{3}{2}\}$$

A سه عضوی است.

(گروه مولفان علوی) (تابع - دامنه تابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» -

$$\begin{cases} \sqrt{5-x} : 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ \sqrt{x-5} : x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in \{5\}$$

باید به ازای $x=5$ ، $x+4+\sqrt{5-x} \geq 0$ باشد که برقرار هست، در نتیجه دامنه تابع برابر

$$D = \{5\}$$

است با:

$$x=5 : f(5) = \sqrt{5+4+0}+0=3 \Rightarrow R_f = \{3\}$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - برد تابع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» -

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$x \neq c \Rightarrow \text{ریشه مخرج } c \Rightarrow c = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x+1} ; x \neq -1 \\ d+x ; x = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x \neq -1 : \frac{x^2 + ax + b}{x+1} = x-5 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 4x - 5$$

$$a = -4, b = -5$$

$$x = -1 : f(-1) = g(-1)$$

$$-1-5 = d-1 \Rightarrow d = -5$$

$$\frac{a+d}{c+b} = \frac{-4-5}{-1-5} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - دو تابع مساوی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» -

$$[x - \frac{1}{4}] + [x+1 - \frac{1}{4}] = 7$$

$$[x - \frac{1}{4}] + [x - \frac{1}{4}] + 1 = 7 \Rightarrow 2[x - \frac{1}{4}] = 6$$

$$[x - \frac{1}{4}] = 3 \Rightarrow 3 \leq x - \frac{1}{4} < 4$$

$$\frac{13}{4} \leq x < \frac{17}{4}$$

$$2b - a = 2(\frac{17}{4}) - \frac{13}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - معادله جزء صحیح) (دشوار)

۱۴- گزینه «۲» -

$$x^6 + 6x^2 + 4 = x^6 + 6x^2 + 9 - 9 + 4 = (x^2 + 3)^2 - 5$$

$$\text{حاصل} = [(x^2 + 3)^2 - 5] = [(x^2 + 3)^2] - 5$$

$$\frac{x - \sqrt{11-3}}{x} \Rightarrow [(\sqrt{11-3})^2] - 5 = [11] - 5 = 11 - 5 = 6$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - معادله جزء صحیح) (متوسط)

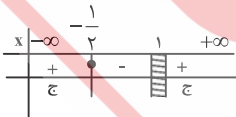
۱۵- گزینه «۲» - بنا به نمودار رسم شده $f(x)$ ، $a=2$ ، $b=-1$ می باشد.

(نمودار $\sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین برده است.)

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + 1$$

$$\frac{x+2}{x-1} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} \geq 0$$



$$D_g = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (1, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R} - (-\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow d-c = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - دامنه تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» - بنا به خاصیت تابع وارون داریم:

$$A \stackrel{a}{b} \in f \Rightarrow A' \stackrel{b}{a} \in f^{-1}$$

با امتحان گزینه‌ها داریم:

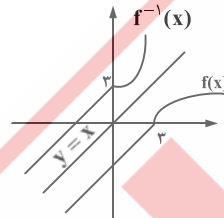
$$A' \stackrel{a}{b} \in f^{-1} \Rightarrow A \stackrel{b}{a} \in f$$

$$y = x^2 + x + 2$$

$$-8 = -8 - 2 + 2 \text{ قابل قبول}$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - وارون تابع) (آسان)

۱۷- گزینه «۴» - خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) محور تقارن بین f و f^{-1} است.



نمودار f^{-1} از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

(گروه مولفان علوی) (تابع - خواص وارون تابع) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» -

$$f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3$$

$$\sqrt{a+3} + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f^{-1}(9) = b \Rightarrow f(b) = 9$$

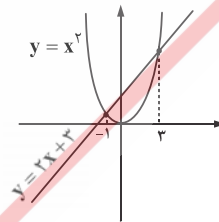
$$\sqrt{b+3} + b = 9 \Rightarrow b = 6$$

$$f^{-1}(3) + f^{-1}(9) = a + b = 1 + 6 = 7$$

(گروه مولفان علوی) (تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۹- گزینه «۱» - بنا به نمودار ترسیم شده و ضابطه $f(x)$ باید a مقداری باشد

که $x^2 \geq 2x + 3$ شود و همچنین $x = 0$ طول نقطه Min تابع x^2 در آن بازه قرار نگیرد.



پس باید a در محدوده $[3, +\infty)$ باشد. ($a \in [3, +\infty)$) و کمترین مقدار a برابر ۳

$$a = 3 : g(3) = \frac{9+9}{6+3} = \frac{18}{9} = 2$$

است:

(گروه مولفان علوی) (تابع - تابع یک به یک) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» - طرفین وسطین نمایید:

$$21b + 2ab + 2a = 2ab + 14b + 3a + 2$$

$$1a = 7b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{1}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه - نسبت و تناسب) (آسان)