ریاضی ۲

۱- گزینه«۳» ـ عبارات رادیکالی همواره نامنفی‌اند، هم‌چنین عبارات توان دوم نیز همواره نامنفی‌اند. بنابراین مجموع این دو عبارت تنها زمانی برابر صفر می‌شود که هر دو عبارت برابر صفر باشند، بنابراین جواب مقداری است که هر دو عبارت را برابر صفر کند.

$$\sqrt{-2x^2+x+3}=0 \Rightarrow -2x^2+x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-4}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ -1\end{cases}$$

$$x^6-2x^3-3=0 \Rightarrow x^3=A$$

$$A^2-2A-3=0 \Rightarrow A=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}3\\ -1\end{cases}$$

$$x^3=-1 \Rightarrow x=-1$$

$$x^3=3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{3}$$

تنها جواب مشترک برابر (-1) است. (اللّه‌دادی)(دروس دوم و سوم ـ روش تغییر متغیر برای حل معادله و معادلات رادیکالی ـ صفحه ۲۲ و ۱)

۲- گزینه«۳» ـ ابتدا هر سه عبارت را هم‌مخرج می‌کنیم:

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x^2-1}=\frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{4x-1}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

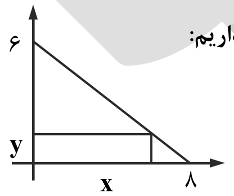
$$\frac{3x+3-4x+1-x^2+x}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

چون هیچ‌کدام از جواب‌ها مشکلی برای مخرج ایجاد نمی‌کنند بنابراین دو جواب دارد. (اللّه‌دادی)(درس سوم ـ معادلات گویا ـ صفحه ۱۹)

۳- گزینه«۳» ـ چون به ازای $x=2$ حاصل تابع برابر صفر می‌شود، بنابراین $x=2$ را در عبارت تابع می‌گذاریم و داریم: $4a+2b+c=0$

(اللّه‌دادی)(درس دوم ـ صفرهای تابع درجه دوم ـ صفحه ۱۵)

۴- گزینه«۱» ـ معادله وتر مثلث به‌صورت $y=-\frac{3}{4}x+6$ است اگر مطابق شکل طول و عرض مستطیل را y و x بنامیم، داریم:



$$S=xy=x(-\frac{3}{4}x+6) \Rightarrow S=-\frac{3}{4}x^2+6x \Rightarrow S_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-36}{4(-\frac{3}{4})}=12$$

(آزاد ریاضی ۹۱) (درس دوم ـ ماکزیمم و مینیمم سهمی)

۵- گزینه«۴» ـ

$$\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_1}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1x_2}=\frac{x_1^4+x_2^4-2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(S^2-2p)^2-2p^2}{p}=-1$$

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$x_1x_2=P=\frac{c}{a}=b$$

$$x_1+x_2=S=-\frac{b}{a}=a$$

$$(a^2-2b)^2-2b^2=-b \Rightarrow (a^2-2b)^2=2b^2-b$$

(اللّه‌دادی)(درس دوم ـ حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم ـ صفحه ۱۳)

۶- گزینه«۴» ـ چون نقطه (α,β) روی خط $2y+x-5=0$ قرار دارد بنابراین در معادله خط صدق می‌کند و داریم:

$$2\beta+\alpha-5=0 \Rightarrow \alpha=5-2\beta$$

طبق صورت سؤال فاصله نقطه (α,β) از $(1,3)$ برابر ۵ است. بنابراین از فرمول فاصله دو نقطه داریم:

$$\sqrt{(5-2\beta-1)^2+(\beta-3)^2}=5$$

$$\sqrt{(4-2\beta)^2+(\beta-3)^2}=5 \Rightarrow (4-2\beta)^2+(\beta-3)^2=25$$

$$16+4\beta^2-16\beta+\beta^2+9-6\beta=25$$

$$5\beta^2-22\beta+\cancel{25}=\cancel{25} \Rightarrow \beta(5\beta-22)=0 \Rightarrow \begin{cases}\beta=0 \Rightarrow \alpha=5\\ \beta=4/4 \Rightarrow \alpha=-3/8\end{cases}$$

(اللّه‌دادی)(درس اول ـ فاصله دو نقطه ـ صفحه ۵)

۷- گزینه«۲» ـ ریشه‌های معادله در معادله صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$x_1^{۲} - ۳x_1 + ۱ = ۰ \Rightarrow x_1^{۲} = ۳x_1 - ۱ \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } x_1} x_1^{۳} = ۳x_1^{۲} - x_1$$

برای $x_۲$ نیز هم‌چنین است.

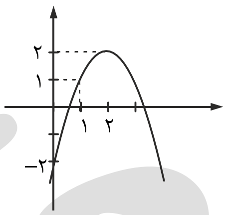
$$\cancel{۳x_1^{۲}} - x_1 + \cancel{۳x_۲^{۲}} - x_۲ \cancel{-۳x_1^{۲}} \cancel{-۳x_۲^{۲}} = -(x_1 + x_۲) = -S = -۳$$

(الله‌دادی)(درس دوم ـ حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم ـ صفحه ۱۳)

۸- گزینه«۴» ـ برای یافتن حداقل مقدار $\sqrt{۱-f(x)}$ باید ماکزیمم مقدار $f(x)$ را بیابیم، ماکزیمم مقدار $f(x)$ برابر ۲ است. اما چون عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین:

$$۱ - f(x) \geq ۰ \Rightarrow f(x) \leq ۱$$

چون دامنه تابع درجه ۲ همه اعداد حقیقی است، از روی نمودار تابع $f(x)$ درمی‌یابیم که $f(x)$ تمام مقدارهای کمتر از ۲ را اتخاذ می‌کند، بنابراین حداقل مقدار تابع $g(x)$ برابر صفر است.



(الله‌دادی)(درس دوم ـ ماکزیمم و مینیمم سهمی ـ صفحه ۲۲)

۹- گزینه«۲» ـ

$$۳x - ۳ = \sqrt{۱-x} \xrightarrow{\text{توان دو}} ۹(x^{۲} - ۲x + ۱) = ۱ - x$$

$$۹x^{۲} - ۱۸x + ۹ = ۱ - x \Rightarrow ۹x^{۲} - ۱۷x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۷ \pm \sqrt{۲۸۹ - ۲۸۸}}{۱۸} \Rightarrow \begin{cases} ۱ \text{ ق ق} \\ \frac{۱۶}{۱۸} = \frac{۸}{۹} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

(الله‌دادی)(درس سوم ـ معادلات گویا و رادیکالی ـ صفحه ۲۳)

۱۰- گزینه«۴» ـ در گزینه«۱» دامنه دو رادیکال هیچ اشتراکی ندارند، بنابراین معادله گزینه اول جواب ندارد. در گزینه «۲» و «۳» مجموع عبارات سمت چپ تساوی بزرگ‌تر از صفر است، بنابراین معادله گزینه «۲» و «۳» برقرار نمی‌باشد.
در گزینه «۴» معادله دارای جواب $x = ۴$ است. (الله‌دادی)(درس سوم ـ معادلات رادیکالی ـ صفحه ۲۳)

۱۱- گزینه«۳» ـ حجم گوی را حجم واحد در نظر می‌گیریم. در این صورت پمپ اول در عرض $\frac{۱}{۳}$ ساعت و پمپ دوم در عرض $\frac{۱}{۱۰}$ ساعت گوی را پر می‌کند یعنی دو پمپ در عرض یک ساعت $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۰}$ را پر می‌کنند، سوراخ در عرض یک ساعت باعث خالی شدن $\frac{۱}{۶}$ گوی می‌شود، بنابر این در عرض یک ساعت $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۶}$ گوی پر می‌شود.

$$\frac{۱}{x} = \frac{۱۳}{۳۰} - \frac{۵}{۳۰} \Rightarrow x = ۳/۷۵ = \text{۳ ساعت و ۴۵ دقیقه}$$

(الله‌دادی)(درس سوم ـ معادلات گویا ـ صفحه ۲۱)

۱۲- گزینه«۲» ـ اگر ریشه‌های معادله $x^{۲} - ۶x + ۳ = ۰$ را β و α در نظر بگیریم، ریشه‌های معادله جدید $\alpha' = \frac{۳}{\alpha} + ۱ , \beta' = \frac{۳}{\beta} + ۱$ می‌شوند.

$$S = \alpha + \beta = ۶ , P = \alpha\beta = ۳$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{۳}{\beta} + \frac{۳}{\alpha} + ۲ = \frac{۳(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{۳ \times ۶}{۳} + ۲ = ۸$$

$$P' = \alpha'\beta' = (\frac{۳}{\beta} + ۱)(\frac{۳}{\alpha} + ۱) = \frac{۹}{\alpha\beta} + \frac{۳}{\alpha} + \frac{۳}{\beta} + ۱ = \frac{۹}{۳} + \frac{۳(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۱ = ۳ + \frac{۳ \times ۶}{۳} + ۱ = ۱۰$$

$$x^{۲} - S'x + P' = x^{۲} - ۸x + ۱۰ = ۰ \text{ معادله جدید}$$

(الله‌دادی)(درس دوم ـ حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله درجه دوم ـ صفحه ۱۳)

۱۳- گزینه«۱» ـ

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۲ + ۶}{۲} = ۴ \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۳ + ۵}{۲} = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow M(۴ , ۴)$$

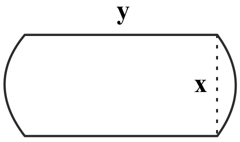
آن‌گاه معادله میانه AM مطابق زیر است:

$$M(۴ , ۴) , A(۱ , ۵) \Rightarrow m_{AM} = \frac{۵ - ۴}{۱ - ۴} = \frac{-۱}{۳}$$

$$y = mx + h \Rightarrow ۴ = \frac{-۴}{۳} + h \Rightarrow h = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow y = \frac{-x}{۳} + \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow ۳y + x - ۱۶ = ۰$$

(الله‌دادی)(مختصات نقطه وسط پاره‌خط و نوشتن معادله خط ـ صفحه ۷)

۱۴- گزینه«۱» ـ محیط شکل حاصل برابر روبه‌رو است:



$$۲y + ۲\pi \times \frac{x}{۲} = ۱۵۰۰$$

$$۲y + ۳x = ۱۵۰۰ \Rightarrow y = ۷۵۰ - \frac{۳}{۲}x$$

$$\text{مساحت شکل} = S_{\square} + S_{\bigcirc} = xy + \pi \frac{x^۲}{۴}$$

$$S = x(۷۵۰ - \frac{۳}{۲}x) + ۳\frac{x^۲}{۴} \Rightarrow S = -\frac{۳}{۴}x^۲ + ۷۵۰x \qquad x_{max} = \frac{-۷۵۰}{۲ \times -\frac{۳}{۴}} = ۵۰۰$$

$$y_{max} = ۷۵۰ - \frac{۳}{۲} \times ۵۰۰ = ۰ \qquad x + y = ۵۰۰$$

(الله‌دادی)(درس دوم ـ ماکزیمم و مینیمم سهمی ـ صفحه ۱۸)

۱۵- گزینه«۱» ـ (الله‌دادی)(درس سوم ـ معادلات گویا ـ صفحه ۱۳)

۱۶- گزینه«۱» ـ طبق صورت سوال قطرهای مستطیل منصف یکدیگرند و داریم:

$$\frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{x_B + x_D}{۲}, \frac{y_A + y_C}{۲} = \frac{y_B + y_D}{۲}$$

$$x_D = ۴, y_D = ۱$$

تابع f در واقع فاصله دو نقطه را می‌دهد و داریم:

$$\begin{matrix} f(AB) = \sqrt{(۳)^۲ + (۳)^۲} = ۳\sqrt{۲} \\ f(AD) = \sqrt{(۲)^۲ + (-۲)^۲} = ۲\sqrt{۲} \end{matrix} \Rightarrow \frac{f(AB)}{f(AD)} = \frac{۳}{۲}$$

(الله‌دادی)(درس اول ـ فاصله دو نقطه ـ صفحه ۵ و ۷)

۱۷- گزینه«۱» ـ برای این‌که معادله دارای دو ریشه منفی باشد، باید $\Delta > ۰$، ضرب ریشه‌ها مثبت و جمع ریشه‌ها منفی باشد، پس:

$$\Delta > ۰ : (a+۳)^۲ + ۴a > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۱۰a + ۹ > ۰ \Rightarrow a < -۹ \text{ یا } a > -۱$$

$$\frac{c}{a} > ۰ = \frac{-۱}{a} > ۰ \Rightarrow a < ۰ , \frac{-b}{a} < ۰ : \frac{-(a+۳)}{a} < ۰ \quad a + ۳ < ۰ \Rightarrow a < -۳$$

اشتراک تمامی جواب‌ها $a < -۹$ است. (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲)(درس دوم ـ رابطه بین ریشه‌های معادله درجه دوم)

۱۸- گزینه«۴» ـ

چون مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ یعنی $a^۲ + \frac{۱}{a^۴}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{۱}{a^۲}$ می‌باشد پس ریشه‌ها $a^۲ , \frac{۱}{a^۴}$ مـی‌باشـند در نتیجـه داریم:

$$\frac{x_۱}{x_۲} + \frac{x_۲}{x_۱} = \frac{a^۲}{\frac{۱}{a^۴}} + \frac{\frac{۱}{a^۴}}{a^۲} = a^۶ + \frac{۱}{a^۶}$$

(آزاد تجربی ۸۱)(درس دوم ـ رابطه بین ریشه‌های معادله درجه دوم)

۱۹- گزینه«۳» ـ چون $x_۲$ یک ریشه معادله است، بنابراین در معادله صدق می‌کند:

$$x_۲^۲ + ۳x_۲ - ۱ = ۰$$

$$x_۲^۲ = ۱ - ۳x_۲$$

$$\sqrt{x_۱^۲(۱ - ۳x_۲)} = \sqrt{x_۱^۲ x_۲^۲} = | x_۱ x_۲ | = ۱$$

$$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow ۱ + ۵ = ۶$$

(آزاد ریاضی ۸۲ ـ با تغییر)(درس دوم ـ رابطه بین ریشه‌های معادله درجه دوم)

۲۰- گزینه«۳» ـ فاصله نقطه $(x_۰ , y_۰)$ از خط به معادله $ax + by + c = ۰$ برابر $\frac{| ax_۰ + by_۰ + c |}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ است.

بنابراین داریم:

$$\frac{| ۳ \times ۳ - ۴ \times ۳ + a |}{۵} = ۲$$

$$۱۰ = | -۳ + a | \Rightarrow \begin{cases} a - ۳ = ۱۰ \Rightarrow a = ۱۳ \\ -a + ۳ = ۱۰ \Rightarrow a = -۷ \end{cases} \qquad ۱۳ - ۷ = ۶$$

(الله‌دادی)(درس اول ـ فاصله نقطه از خط ـ صفحه ۸)