

$$a_7 = \frac{1}{4}a_7 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{4}(a_1 + 2d) \Rightarrow \frac{1}{4}a_1 + 5d = 0$$

$$\text{مجموع جملات دنباله حسابی} = \frac{n}{4}(2a_1 + (n-1)d)$$

می‌دانیم $(\frac{n}{4})$ همواره مثبت و مخالف صفر است، در نتیجه باید عبارت $2a_1 + (n-1)d$ برابر صفر باشد: $2a_1 + (n-1)d = 0$

از ضرب عبارت $\frac{1}{4}a_1 + 5d = 0$ در عدد ۴ به عبارت $2a_1 + 20d = 0$ می‌رسیم. با مقایسه این عبارت و $2a_1 + (n-1)d = 0$ داریم:

$$n-1 = 20 \Rightarrow n = 21$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس اول - مجموع جملات دنباله حسابی)

۲- گزینه «۱» - با توجه به صورت سوال، ارتفاع توپ پس از هر بار برخورد به زمین نصف می‌شود. در نتیجه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و جمله

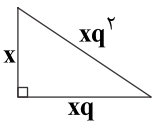
اول ۲۰ خواهیم داشت. اما چون در مورد مسافت صحبت کرده است پس جمله اول برابر $20 + 20 = 40$ خواهد بود.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow 70 = \frac{40(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{70}{40} = 1 - (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{7}{8} = 1 - (\frac{1}{2})^n \Rightarrow (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 3$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس اول - مجموع جملات دنباله هندسی)

۳- گزینه «۳» -

جملات دنباله هندسی: x, xq, xq^2



$$\text{رابطه فیثاغورس: } x^2q^4 = x^2q^2 + x^2 \xrightarrow{+x^2} q^4 = q^2 + 1 \Rightarrow (q^2)^2 - q^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \Rightarrow q^2 = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{ق ق} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{q>1} q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس اول - دنباله هندسی)

۴- گزینه «۳» - عبارات رادیکالی هرگز منفی نخواهند بود و چون در صورت سوال با یک عدد مثبت جمع شده‌اند، پس همواره جوابی بزرگ‌تر از

صفر خواهد داشت و هرگز صفر نمی‌شود. پس معادله جوابی ندارد. (رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - صفرهای تابع)

۵- گزینه «۴» - برای داشتن دو ریشه باید $\Delta > 0$ باشد و چون دو ریشه مثبت‌اند پس P و S هم باید مثبت باشند:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(\Delta m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 24m > 0 \Rightarrow m > 24 \text{ یا } m < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \Delta m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{\Delta} \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 - m > 0 \Rightarrow m < 2 \end{cases}$$

در بازه $(-\frac{1}{\Delta}, 0)$ جواب داریم ولی در این بازه عدد صحیحی وجود ندارد. (رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - معادلات درجه دوم)

۶- گزینه «۲» - چون در صورت سوال گفته شده بیشترین مقدار تابع صفر است، پس نمودار سهمی بر محور x ها مماس است و این یعنی ریشه مضاعف:

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = k^2 - 4(k-3)(-1) = 0 \Rightarrow k^2 + 4k - 12 = 0 \Rightarrow (k+6)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -6 \end{cases}$$

چون تابع دارای \max است در نتیجه ضریب x^2 باید منفی باشد و دهانه سهمی رو به پایین: $k-3 < 0 \Rightarrow k < 3$

از اشتراک $k < 3$ با جواب‌های $k = 2, k = -6$ می‌توان فهمید که هر دو عدد به دست آمده درست هستند.

(رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - معادلات درجه دوم)

۷- گزینه «۳» - α, β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ هستند، پس: $\alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2$

اکنون حاصل جمع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

$$S = (\frac{1}{\alpha} + 1) + (\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{-1}{2} + (\frac{5}{4} - 1) = \frac{-1}{4}$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

معادله مورد نظر ما باید به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ باشد پس داریم:

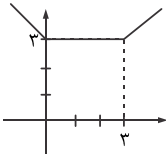
(رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - روابط بین ریشه‌های معادله)

$$\left. \begin{aligned} a_{r_n} - a_1 &= a_1 q^{n-1} - a_1 = a_1 (q^{n-1} - 1) = 30 \\ S_{19} &= \frac{a_1(1 - q^{19})}{1 - q} = \frac{a_1(q^{19} - 1)}{q - 1} = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{30}{q-1} = 15 \Rightarrow q-1=2 \Rightarrow q=3$$

۸- گزینه «۴» -

(رستمی کیا) (فصل اول - درس اول - دنباله هندسی)

۹- گزینه «۱» - به کمک رسم نمودار می‌توانیم به جواب سوال برسیم:



با توجه به شکل اگر m پایین‌تر از $y = 3$ باشد معادله جواب نخواهد داشت. (رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - روش هندسی حل معادلات)

۱۰- گزینه «۲» - $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ که چون $x < -2$ است، حاصل آن می‌شود $-(x-2)$ هم‌چنین چون $x < -2$ و $x^2 - 4 > 4$ پس $|x^2 - 4| = x^2 - 4$. بنابراین حاصل عبارت می‌شود:

$$x^2 - 4 > 0, \quad |x^2 - 4| = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 - (x-2) = c \Rightarrow x^2 - x - 2 = c \Rightarrow x^2 - x - 2 - c = 0$$

$$1 - 4(-2 - c) < 0 \Rightarrow 9 + 4c < 0 \Rightarrow 4c < -9 \Rightarrow c < -\frac{9}{4}$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس چهارم - قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۱۱- گزینه «۳» - اگر فرض کنیم $t = \sqrt{x}$ خواهیم داشت: $t^2 - 4t + m - 2 = 0$ برای آن که دو جواب برای x به دست آید، باید معادله فوق دارای دو ریشه متمایز نامنفی باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow 16 - 4(m-2) > 0 \Rightarrow m < 6 \\ \frac{c}{a} \geq 0 &\Rightarrow \frac{m-2}{1} \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \\ \frac{-b}{a} > 0 &\Rightarrow -(-\frac{4}{1}) > 0 \Rightarrow 4 > 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} 2 \leq m < 6$$

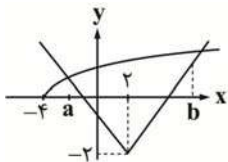
(سراسری ۸۹ - با تغییر) (فصل اول - درس دوم - معادلات درجه دوم)

۱۲- گزینه «۴» - در مخلوط اول که ۶ کیلوگرم است $\frac{20}{100} \times 6 = 1/2$ کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۲ کیلوگرم است $\frac{10}{100} \times 2 = 1/6$ کیلوگرم رنگ موجود است. فرض می‌کنیم که با تبخیر x کیلوگرم از مواد نیمی از رنگ تبخیر شود، در این صورت داریم:

$$\frac{1/2 + 1/6}{6 + 2 - x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{2/3}{8 - x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5/6 = 8 - x \Rightarrow x = 2/4$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس سوم - معادلات گویا و گنگ)

۱۳- گزینه «۳» - نمودار توابع $y = \sqrt{x+4}$, $y = |x-2| - 2$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل کافی است a و b را محاسبه کنیم. برای این منظور داریم:

$$\sqrt{x+4} = |x-2| - 2 \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x+4} = -x \Rightarrow x+4 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ ق ق } , x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \text{ ق ق } \\ x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+4} = x - 4 \Rightarrow x+4 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 12 = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{9 - \sqrt{33}}{2} \text{ ق ق } , x = \frac{9 + \sqrt{33}}{2} \text{ ق ق } \end{cases}$$

(سراسری ۹۴ - با تغییر) (فصل اول - درس دوم و چهارم - معادله درجه دوم و قدر مطلق و ویژگی‌های آن)

۱۴- گزینه «۱» - طبق فرض داریم:

$$2x = (-36) + (-26) \Rightarrow x = -31 \Rightarrow d = x - (-36) = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -36 + 5(n-1) = 5n - 41$$

حال تعداد جملات منفی را به دست می آوریم:

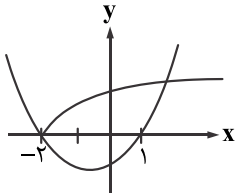
$$a_n < 0 \Rightarrow 5n - 41 < 0 \Rightarrow n < 8.2 \Rightarrow n = 8$$

یعنی ۸ جمله اول منفی اند و مجموع آن ها برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2}(2(-36) + 7 \times 5) = 4(-37) = -148$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس اول - مجموع جملات دنباله حسابی)

۱۵- گزینه «۲» -



$$x-1 = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} \xrightarrow{x \neq -2} (x-1)(x+2) = \sqrt{x+2}$$

با توجه به نمودار دو منحنی در دو نقطه تلاقی دارند. اما چون شرط $(x \neq -2)$ وجود دارد پس فقط یکی از این جواب ها قابل قبول خواهد بود.

(رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - حل معادلات به روش هندسی)

۱۶- گزینه «۴» -

$$|x-1| < 0.1 \Rightarrow -0.1 < x-1 < 0.1 \Rightarrow 0.9 < x < 1.1 \xrightarrow{\times 2} 1.8 < 2x < 2.2 \xrightarrow{-3} -1.2 < 2x-3 < -0.8$$

$$\Rightarrow A = -1/2, B = -0.8, A+B = -2$$

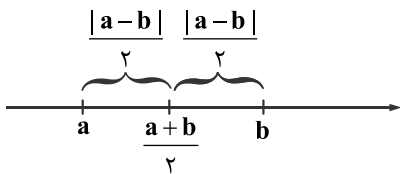
(رستمی کیا) (فصل اول - درس چهارم - قدر مطلق و ویژگی های آن)

۱۷- گزینه «۲» - برای برقرار بودن عبارت $mx^2 + mx - 2 < 0$ باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m(m+4) < 0 \Rightarrow -4 < m < 0 \\ a < 0 \Rightarrow m < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} -4 < m < 0$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - معادلات درجه دوم)

۱۸- گزینه «۲» - با توجه به شکل داریم:



$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

(رستمی کیا) (فصل اول - درس چهارم - قدر مطلق و ویژگی های آن)

۱۹- گزینه «۳» -

x	-2	3
$-x^2 + x - 8$	-	-
$x^2 - x - 6$	+	-
y	-	+

$$\frac{-x^2 + x - 8}{x^2 - x - 6} < 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-8) < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$a < 0 \Rightarrow$ همواره منفی

(رستمی کیا) (فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم)

۲۰- گزینه «۳» - مجموع n جمله ابتدایی یک دنباله هندسی با قدر نسبت q و جمله اول a_1 برابر است با $S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$ با دانستن این مطلب

صورت و مخرج را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1-t+t^2-t^3+\dots-t^7+t^8 = \frac{1-(-t)^9}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t} \\ t^6-t^3+1 = \frac{1-(-t^3)^3}{1-t^3} = \frac{1+t^9}{1+t^3} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1+t^9}{1+t} = \frac{1+t^3}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1+t^3}{1+t} = 1-t+t^2 \xrightarrow{t = \frac{1-\sqrt{15}}{2}} \text{حاصل} = 1 - \frac{1-\sqrt{15}}{2} + \frac{1+15-2\sqrt{15}}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

(سراسری - ۹۳ - با تغییر) (فصل اول - درس اول - مجموع جمله دنباله هندسی)