

## حسابان ۱

۱- گزینه «۳» -

$$13, a_2, a_3, \dots, a_{50}, 115 \Rightarrow S_{\Delta r} = \frac{\Delta r}{r} (13 + 115) = 26 \times 128 = 3328$$

$\downarrow$   $a_1$        $\downarrow$   $a_{50}$   
 ۵۰ تا واسطه

$$S_{\Delta r} - (13 + 115) = 3328 - 128 = 3200$$

مجموع واسطه‌ها

(گروه مؤلفان علوی) (مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۲- گزینه «۳» - عبارت را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{12}) = 4095 \Rightarrow x^{12} - 1 = 4095 \Rightarrow x^{12} = 4096 = 2^{12}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x^{12}-1}$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

(گروه مؤلفان علوی) (مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = 4$$

(گروه مؤلفان علوی) (روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم) (دشوار)

۴- گزینه «۴» -

$$2x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{5}{2} \\ P = \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

$$S' = \frac{1}{-\alpha^2} + \frac{1}{-\beta^2} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = -\frac{S^2 - 2P}{P^2} = -\frac{\frac{25}{4} + 2}{1} = -\frac{33}{4}$$

$$P' = \left(\frac{1}{-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{-\beta^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{1}{P^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{33}{4}x + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 33x + 4 = 0$$

(گروه مؤلفان علوی) (روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم) (دشوار)

۵- گزینه «۳» -

$$a < 0, b > 0, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} abc < 0 \\ \sqrt{a^2} = |a| = -a \\ |a+b| \neq |a| + |b| \end{cases}$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (آسان)

۶- گزینه «۱» -

$$p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 8 + 2m + 10 = 0 \Rightarrow m = -13$$

$$p(x) = \frac{x^2 + 2x^2 - 13x + 10}{-(x^2 - 2x^2)} \cdot \frac{x-2}{x^2 + 4x - 5} \Rightarrow p(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 4x - 5)}{S = \alpha + \beta = -4}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{6x^2} - 13x + 10 \\ -(\cancel{6x^2} - 8x) \\ \hline -5x + 10 \\ -(-5x + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - اگر  $x^2 = t$  باشد، داریم:

$$t^2 + mt - 4m = 0$$

اگر معادله فوق دارای دو ریشه با علامت‌های متفاوت یا یک ریشه با علامت مثبت باشد، شرایط مسئله برقرار است. بنابراین:

$$(1) \Rightarrow P < 0 \Rightarrow -4m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow m^2 + 16m = 0 \Rightarrow m = -16 \text{ یا } m = 0 \text{ (2)} \\ \text{و} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ (3)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{(1)} m > 0 \\ \xrightarrow{(2) \cap (3)} m = -16 \end{array} \right\} \xrightarrow{U} m > 0 \text{ یا } m = -16 \Rightarrow (0, +\infty) \cup \{-16\}$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (دشوار)

۸- گزینه «۲» -

$$4 - x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{array} \right. \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 0 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 0$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (آسان)

۹- گزینه «۴» - با توجه به نمودار، ۱- و ۴ صفرهای تابع هستند، بنابراین:

$$f(x) = a(x - (-1))(x - 4) \Rightarrow f(x) = a(x + 1)(x - 4) \xrightarrow{f(0)=3} 3 = -4a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}(x + 1)(x - 4) \Rightarrow f(5) = -\frac{3}{4}(6)(1) = -4.5$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» - از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = x - \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{9}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 4x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{3}{2} \\ x_2 = -2 + \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{دو ریشه دارد.}$$

(گروه مؤلفان علوی) (حل معادلات قدرمطلق) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» -

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ کیلوگرم، نمک}$$

$$\text{کیلوگرم } 85/714 \Rightarrow y = \frac{600}{y} \Rightarrow y = \frac{8}{200 - y} \Rightarrow \text{اگر فقط آب تبخیر کنیم}$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات شامل عبارتهای گویا) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{W} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ L+W &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{L}{2-L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2L = 2+2\sqrt{5} - (1+\sqrt{5})L$$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{5})L = 2+2\sqrt{5} \Rightarrow L = \frac{2+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{-4+4\sqrt{5}}{4} \Rightarrow L = \sqrt{5}-1 \Rightarrow W = 2-(\sqrt{5}-1) = 3-\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = L \times W = (\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}-8$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات شامل عبارت‌های گویا) (دشوار)

۱۳- گزینه «۲» -

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})^2 = 16 \Rightarrow x+3+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+3x+1=16$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x \Rightarrow 3x^2+10x+3 = (6-2x)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+10x+3 = 36-24x+4x^2 \Rightarrow x^2-34x+33=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=33 \end{cases}$$

$x=33$  در معادله اولیه صدق نمی‌کند، بنابراین این معادله دارای یک جواب ( $x=1$ ) است.

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات شامل عبارت‌های گنگ) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{4+2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=3$$

(گروه مؤلفان علوی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» -

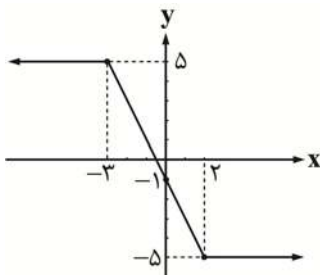
$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

x	-3	2	
x-2	-	-	+
x+3	-	+	+

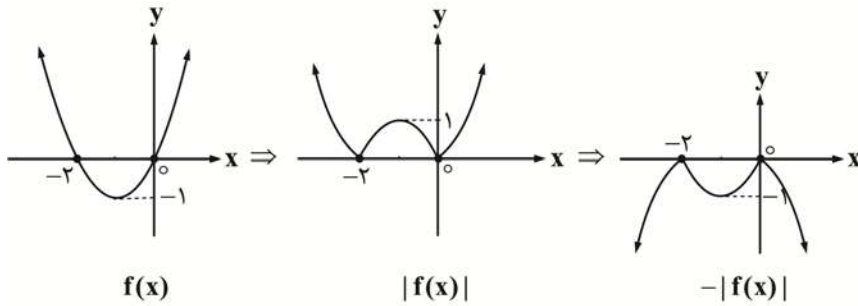
$$\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \Rightarrow \cancel{x}+2+\cancel{x}+3=5 \\ -3 \leq x \leq 2 \Rightarrow -x+2-x-3=-2x-1 \\ x > 2 \Rightarrow \cancel{x}-2-\cancel{x}-3=-5 \end{cases}$$

با توجه به شکل، نمودارهای  $y = |x-2| - |x+3|$  و  $y = k$  به‌ازای  $k = 5$  و  $k = -5$  بی‌شمار نقطه برخورد دارند.



(گروه مؤلفان علوی) (رسم توابع قدرمطلق) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» -



(گروه مؤلفان علوی) (رسم - توابع قدرمطلق) (آسان)

۱۷- گزینه «۴» -

$$\text{باید} \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a-2)^2 + 4(a-14) > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \\ 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14 \\ 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -2 \text{ یا } a > 5 \\ a < 14 \\ a > 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 5 < a < 14$$

(سراسری ریاضی - ۹۶) (صفرهای تابع) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» - حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

تابع باید دارای max باشد، چون توابع min دار از ناحیه اول می‌گذرند، پس:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 12 > 0 \\ -\frac{1}{a-3} \geq 0 \\ -\frac{a}{a-3} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -6 \text{ یا } a > 2 \\ a < 3 \\ a \leq 0 \text{ یا } a > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} (3)$$

از  $(1) \cap ((2) \cup (3))$  نتیجه  $a \leq 2$  به دست می‌آید. (سراسری ریاضی - ۹۲) (ترکیبی) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» -

$$\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} = A \Rightarrow A + \frac{1}{A} = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

حاصل عبارت سمت چپ مساوی بزرگتر یا مساوی ۲ است.  $A > 0 \Rightarrow A + \frac{1}{A} \geq 2$

درحالی‌که حاصل عبارت سمت راست تساوی کوچک‌تر از ۲ است، پس معادله ریشه ندارد.

(کتاب همراه علوی) (معادلات شامل عبارت‌های گویا) (متوسط)

۲۰- گزینه «۲» - چون دو طرف نامعادله مثبت است، طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(|x| - 2)^2 < (|x| - 4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4|x| + 4 < x^2 - 8|x| + 16$$

$$\Rightarrow 4|x| < 12 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

(کتاب همراه علوی) (ویژگی‌های قدرمطلق) (متوسط)