

حسابان ۱

۱- گزینه «۴» -

$$2x+3, x^2, 3x+4$$

$$2x^2 = (2x+3) + (3x+4) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق } x = -1: 1, 1, 1 \\ x = \frac{7}{2}: 10, \frac{49}{4}, \frac{29}{2} \Rightarrow d = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(10) + 19(\frac{9}{4})) = 10(\frac{251}{4}) = 627 \frac{1}{2}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$f, a, 1, b, \dots$$

$$a^2 = f(1) \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} - \text{دنباله نزولی } a = 2: 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots \\ \text{ق ق} - \text{دنباله غیرنزولی } a = -2: 4, -2, 1, \frac{-1}{2}, \dots \Rightarrow q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{4(1-(-\frac{1}{2})^n)}{1-(-\frac{1}{2})}$$

$$1 - (-\frac{1}{2})^n = \frac{63}{64} \Rightarrow (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{64} \Rightarrow (-\frac{1}{2})^n = (\frac{-1}{2})^6 \Rightarrow n = 6$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (آسان)

۳- گزینه «۲» -

جمله اول

$$\frac{a}{q}$$

جمله دوم

جمله سوم

$$a, aq$$

جمله چهارم

$$\frac{3}{2}$$

$$(\frac{a}{q})(a)(a \cdot q) = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^2 \Rightarrow \frac{3}{6} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق } q = -\frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{12(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 24(1-\frac{1}{2^{10}})$$

$$S_{10} = 24(\frac{1023}{1024}) = \frac{3069}{128}$$

(میرزایی) (دنباله‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات دنباله هندسی) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -

$$S = \frac{-b}{a} : \alpha + \beta = \frac{(\alpha+1)}{1} \Rightarrow \beta = 1$$

$$P = \frac{c}{a} : \alpha \cdot \beta = \frac{-2\beta}{1} \Rightarrow \alpha = -3$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (-3)^3 - (1)^3 = -28$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (آسان)

$$\Delta > 0 : 4m^2 + 12(m-6) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0$$

$$m < -6 \cup m > 3 \quad (I)$$

m	-6	3
	+	-
	+	+
	ج	ج

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (II)$$

m	6
	+
	-
	ج

$$\frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 3 < m < 6$$

(سراسری داخل کشور تجربی - ۹۷) (معادله درجه دوم - وجود و علامت ریشه‌ها) (دشوار)

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

$$\text{جدید } S_1 = x_1 + x_2 = (1 + \frac{2}{\alpha}) + (1 + \frac{2}{\beta}) = 2 + 2(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) = 2 + 2(\frac{S}{P})$$

$$S_1 = 2 + 2(\frac{3}{-1}) = 2 - 6 = -4$$

$$\text{جدید } P_1 = x_1 \cdot x_2 = (1 + \frac{2}{\alpha}) \cdot (1 + \frac{2}{\beta}) = 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 + 2(\frac{S}{P}) + \frac{4}{P}$$

$$P_1 = 1 + 2(\frac{3}{-1}) + \frac{4}{-1} = 1 - 6 - 4 = -9$$

$$\text{جدید معادله } x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 9 = 0$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم - طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

۷- گزینه «۲» - نکته: اگر $S(m, k)$ رأس سهمی باشد، ضابطه سهمی به صورت $f(x) = a(x-m)^2 + k$ می‌باشد.

$$S(2, 3)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 + 3 \xrightarrow{(0,-1) \in f} -1 = a(0-2)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

$$f(\frac{1}{4}) = -(\frac{1}{4}-2)^2 + 3 = -\frac{9}{4} + 3 = \frac{3}{4}$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم (سهمی) - طریقه نوشتن ضابطه نمودار) (متوسط)

۸- گزینه «۴» - برای آن که نمودار سهمی از چهار ناحیه بگذرد، باید صفرهای تابع مختلف‌العلامه باشند:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{2-k} < 0$$

k	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\frac{k+1}{2-k}$		-	+	-
		ج	ج	

$$k < -1 \cup k > 2$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - نمودار درجه دوم) (آسان)

۹- گزینه «۲» -

$$\text{معادله در ریشه } x = -2: (-2)^2 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \Rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$$f(x) = x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$$

$$f(x) = 0: (x^2 - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = +1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع مربعات}} (-1)^2 + (1)^2 = 2$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم - صفرهای تابع) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» برقرار و صحیح هستند، ولی گزینه «۳» مثال نقض دارد.

$$a = 2 \xrightarrow{a \cdot b > 0} |a - b| = |a| - |b| \Rightarrow |2 - 5| = |2| - |5| = 3 \neq -3$$

$$b = 5$$

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - ویژگی‌های قدرمطلق) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» -

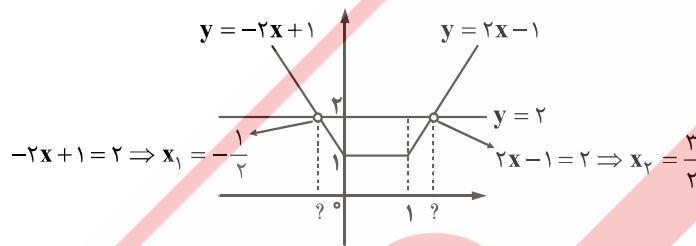
$$A = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$$

$$A = |x+1| - |x-2| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x < -1} A = -(x+1) + (x-2)$$

$$A = -x - 1 + x - 2 = -3$$

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - تعیین علامت قدرمطلق) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» -



$$y_1 = y_2 \Rightarrow 2 - |x| = x - 1$$

$$\underbrace{|x-1| + |x|}_{\text{تابع ثابت}} = \underbrace{2}_{\text{تابع گلدانی}}$$

$$S = \frac{(2+1)(1)}{2} = \frac{3}{2}$$

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - ترسیم توابع قدرمطلق) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

$$|x-2| - 3 = 2 \Rightarrow |x-2| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 5 \Rightarrow x_1 = 7 \\ x-2 = -5 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$|x-2| - 3 = -2 \Rightarrow |x-2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \Rightarrow x_3 = 3 \\ x-2 = -1 \Rightarrow x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 7(-3)(3)(1) = -63$$

$$\text{حاصل ریشه‌ها} = 7 + (-3) + (3) + 1 = 8$$

$$\text{نسبت} = \frac{-63}{8}$$

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - حل معادله قدرمطلق) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» - چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعادله هستند، پس باید محدوده $x > 0$ را در نظر بگیرید، در نتیجه عبارت داخل قدرمطلق مثبت خواهد شد و قدرمطلق برداشته می‌شود:

$$(x-4) \cdot (x+1) < 3x-9 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 3x - 9$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$(1, 5) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{2, 3, 4\}$$

x	1	5
$x^2 - 6x + 5$	+	-
	+	-
	+	+
	ج	

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - حل نامعادله قدرمطلق) (متوسط)

$$\frac{|2x-1|}{|x-3|} > 1 \xrightarrow{x \neq 3} |2x-1| > |x-3| \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسانید}} (2x-1)^2 > (x-3)^2 \quad (I)$$

$$4x^2 - 4x + 1 > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2 \cup x > \frac{4}{3} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} (-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) - \{3\} \text{ یا } \mathbb{R} - [-2, \frac{4}{3}], x \neq 3$$

x	-2	$\frac{4}{3}$
$3x^2 + 2x - 8$	+	-
	ج	ج

(میرزایی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - حل نامعادله قدرمطلق) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» - روش اول: امتحان گزینه‌ها:

گزینه «۴» حذف \Rightarrow غ ق ق $x = 1: 0 + 3 > 3$

گزینه «۱» حذف \Rightarrow غ ق ق $x = -1: 2 + 1 > 3$

گزینه «۳» حذف \Rightarrow ق ق $x = 0: 1 + 1 > 0$

روش دوم: خواص قدرمطلق

x	$-\frac{1}{2}$	1
$(x-1)(2x+1)$	+	-
	ج	ج
	$(-\frac{1}{2}, 1)$	

$$|a-b| = |b-a| \Rightarrow |1-x| = |x-1|$$

$$|x-1| + |2x+1| > |3x|$$

$$|a| + |b| > |a+b| \Rightarrow a \cdot b < 0$$

$$(x-1) \cdot (2x+1) < 0$$

(کتاب همراه علوی) (قدرمطلق و ویژگی‌های آن - حل نامعادله قدرمطلق) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» -

t = مدت زمان تایپ بهروز

$t+9$ = مدت زمان تایپ فرهاد

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20t(t+9) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20}\right)$$

$$20(t+9) + 20t = t(t+9) \Rightarrow 20t + 180 + 20t = t^2 + 9t$$

$$t^2 - 31t - 180 = 0 \Rightarrow (t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 36 \\ t = -5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(سراسری داخل کشور ریاضی - ۹۸) (معادلات گویا و گنگ - حل معادله گویا) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» - اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم:

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L} \quad (I) \text{ رابطه}$$

آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است:

$$2(L+W) = 16 \Rightarrow L+W = 8 \Rightarrow W = 8-L$$

$$(I) \text{ بنا به رابطه } \frac{L}{8-L} = \frac{8}{L} \Rightarrow L^2 = 64 - 8L \Rightarrow L^2 + 8L - 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 4(\sqrt{5}-1) \\ L = -4(\sqrt{5}+1) < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(میرزایی) (معادلات گنگ و گویا - نسبت طلایی در مستطیل) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} \sqrt{3-x} : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} : x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D = \{3\}$$

$$\text{دامنه امتحان } x = 3 \Rightarrow 0 + \sqrt{16+0} = 4 \Rightarrow 4 = 4 \checkmark$$

معادله فقط یک جواب دارد. (میرزایی) (معادلات گویا و گنگ - حل معادله گنگ) (متوسط)

$$x^2 + 4x + 3 = t : t = \sqrt{t+2}$$

$$t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 : -1 \neq \sqrt{-1+2} \\ t = 2 : 2 = \sqrt{2+2} \end{cases}$$

$$t = 2 : x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} \quad (x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -4 \text{ ریشه‌ها (یا می‌توان گفت: } -4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{3} \\ x_2 = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -4$$

(سراسری داخل کشور ریاضی - ۹۴ با تغییرات) (معادلات گویا و گنگ - حل معادله گنگ) (دشوار)