

حسابان ۱

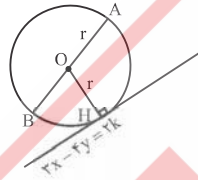
۱- گزینه «۳» -

$$\text{خط BC: } m = \frac{\Delta - 2}{2 - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}$$

$$y + 1 = \frac{-2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 3 = -2x + 4 \Rightarrow 3y + 2x = 1$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - معادله خط) (متوسط)

۲- گزینه «۲» -



$$\text{مرکز دایره } O \begin{cases} x = \frac{-2+2}{2} = 0 \\ y = \frac{-5+7}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{دایره شعاع } OA = r = \sqrt{(2-0)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{فاصله } O \text{ از خط مماس بر دایره } r = \frac{|0-4-2k|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-4-2k|}{5} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |2k+4| = 10\sqrt{10} \xrightarrow{k>0} 2k+4 = 10\sqrt{10} \Rightarrow k = 5\sqrt{10} - 2$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۳- گزینه «۱» -

$$\begin{aligned} & A(-6, 2) \\ & \begin{cases} x - 3y = 4 \\ x + 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow B(1, -1) \end{aligned}$$

$$\text{محل اقطار متوازی الاضلاع وسط قطر است.} \Rightarrow G \begin{cases} x = \frac{-6+1}{2} = \frac{-5}{2} \\ y = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$OG = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - وسط پاره خط) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -

$$\text{قطر } AC = \sqrt{(0-4)^2 + (1+2)^2} = 5 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow d = \sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{طول ضلع مربع} \quad s = a^2 = \frac{25}{2}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله دو نقطه در صفحه) (آسان)

۵- گزینه «۲» -

$$A \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \alpha \end{cases} \in x + y = 1$$

$$\frac{|3\alpha - 4(1-\alpha) - 5|}{\sqrt{9+16}} = 5 \Rightarrow |7\alpha - 9| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha - 9 = 25 \\ 7\alpha - 9 = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{34}{7} \Rightarrow A \begin{cases} x = \frac{34}{7} \\ y = 1 - \frac{34}{7} = \frac{-27}{7} \end{cases} \\ \alpha = \frac{-16}{7} \Rightarrow B \begin{cases} x = -\frac{16}{7} \\ y = 1 + \frac{16}{7} = \frac{23}{7} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{-27}{7} + \frac{23}{7} = \frac{-4}{7}$$

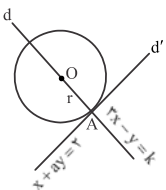
(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۶- گزینه «۱» -

خط $d(1, 2) \in d$

$$3(1) - 2k = k \Rightarrow k = 1 \quad d: 3x - y = 1$$

بنا به توضیحات صورت مسئله خط مماس بر دایره و قطر بر هم عمودند:



$$d: 3x - y = 1 \Rightarrow y = 3x - 1$$

$$\text{خط مماس } d': x + ay = 2 \Rightarrow y = \frac{-1}{a}x + \frac{2}{a}$$

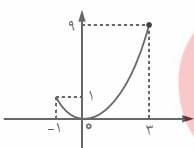
خطوط d و d' بر هم عمودند: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$3 \times \frac{-1}{a} = -1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow d': x + 3y = 2$$

$$\text{دایره شعاع } OA = r = \frac{|1+3(2)-2|}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad s = \pi r^2 = \frac{5\pi}{2}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله نقطه از خط) (دشوار)

۷- گزینه «۳» - بنا به نمودار در دامنه $D = [-1, 3]$ برد تابع f به صورت زیر است:



$$R_f = [0, 9]$$

$$\text{برد } R_f \subseteq B$$

بنا به تعریف هم دامنه گزینه «۳» قابل قبول است.

$$B = (-\infty, 15)$$

(گروه مولفان علوی) (تعریف هم دامنه - تابع) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$$|x| + |y| = 2 \xrightarrow{\text{مثال نقض}} x = 0 : |y| = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{تابع نیست}$$

گزینه «۲»:

$$2y^2 - \Delta x^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \text{تابع نیست}$$

گزینه «۴»:

$$x + y^3 - y = 2 \xrightarrow{x=2} 2 + y^3 - y = 2 \xrightarrow{\text{مثال نقض}}$$

$$y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{تابع نیست}$$

گزینه «۳»:

$$|y| + 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow |y| + (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ |y|=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \text{تابع هست}$$

(گروه مولفان علوی) (تعریف تابع - تابع) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$\frac{f(x)}{x+2}$	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$-$
$\frac{f(x)}{x+2}$	$-$	0	$-$	$+$	$-$

$$D = [0, 2] \quad \text{اعداد صحیح در دامنه}$$

(گروه مولفان علوی) (دامنه تابع - تابع) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» -

$$x \neq c \Rightarrow \text{ریشه مخرج} \Rightarrow c = 3$$

$$x \neq 3 : \frac{x^2 - \Delta x + 6}{x - 3} = ax + b$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = ax + b \Rightarrow x-2 = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x-2$$

$$x=3 : f(3) = g(3) \Rightarrow d-1 = 3-2 \Rightarrow d=2$$

$$a+b+c+d = 1-2+3+2 = 4$$

(گروه مولفان علوی) (تساوی دو تابع - تابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۲» -

$$f(x) = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

نمودار $f(x)$ از انتقال ۲ واحد به سمت راست $y = \frac{1}{x}$ و ۲ واحد به سمت بالا به دست آمده است.

(گروه مولفان علوی) (نمودار تابع گویا - تابع) (آسان)

۱۲- گزینه «۴» -

$$f(x) = \frac{x+5}{x+\frac{1}{x+2}} \quad \text{ریشه مخرج} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

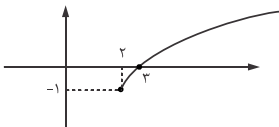
$$x + \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{x+2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ریشه مخرج}$$

$$\xrightarrow{a < b} \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x-2} - 1$$

برای رسم نمودار $g(x)$: ۱- نمودار $\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست ببرید.

۲- سپس نمودار را یک واحد پایین بیاوید.



(گروه مولفان علوی) (نمودار تابع رادیکالی - تابع) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» -

$$t^2 + 2t - 24 = 2t + 1 \xrightarrow{[x]=t} \frac{t^2 + 2t - 24}{2t + 1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -5 \end{cases}$$

$$t = 5 : [x] = 5 \Rightarrow 5 \leq x < 6$$

$$t = -5 : [x] = -5 \Rightarrow -5 \leq x < -4 \Rightarrow [-5, -4) \cup [5, 6) \Rightarrow \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

(گروه مولفان علوی) (معادله جزء صحیح - تابع) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» -

$$[x+1+\frac{1}{3}] + [x+\frac{1}{3}] = 5 \Rightarrow 2[x+\frac{1}{3}] + 1 = 5$$

$$[x+\frac{1}{3}] = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x + \frac{1}{3} < 3 \\ \frac{5}{3} \leq x < \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$2b - a = 2(\frac{10}{3}) - \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

(گروه مولفان علوی) (معادله جزء صحیح - تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» -

$$[x] = t : \begin{cases} [x]^2 - 5[x] + 4 < 0 \\ t^2 - 5t + 4 < 0 \end{cases}$$

t	1	4
	$+$	$-$
	$+$	$+$

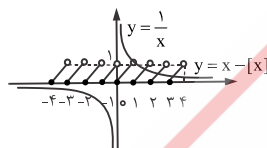
$$1 < t < 4 \Rightarrow 1 < [x] < 4 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \end{cases} \Rightarrow [2, 4) \notin D$$

$$\{2, 3\} = \text{اعداد صحیح که جزء دامنه نیستند}$$

(گروه مولفان علوی) (دامنه تابع - تابع) (متوسط)

$$x - [x] = \frac{1}{x}$$

$$y_1 = x - [x], y_2 = \frac{1}{x}$$



فقط ۳ ریشه دارد. (در بازه مورد نظر)

(گروه مولفان علوی) (رسم نمودار - تابع) (متوسط)

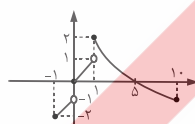
۱۷- گزینه «۱» - برای رسم $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به راست و سپس

نسبت به محور x ها قرینه نمایید و سپس ۲ واحد بالا بیاورید.

رسم $y = x + [x]$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ -1 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 & \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = x \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$



بنا بر رسم نمودار تابع f داریم:

$$\text{برد } R_f = [-2, 2]$$

$$b - a = 2 - (-2) = 4$$

(گروه مولفان علوی) (برد تابع - تابع) (دشوار)

۱۸- گزینه «۱» -

$$[x] - x \geq 0 \xrightarrow{\text{می دانیم}} [x] - x = 0 \Rightarrow [x] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \sqrt{[x] - x} = 0$$

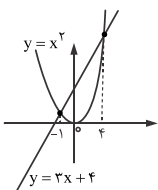
برد $R_f = \{0\}$ برد یک عضو دارد.

(گروه مولفان علوی) (برد تابع - تابع) (متوسط)

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = 3x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$



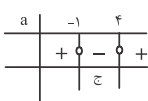
اگر تغییرات a در محدوده‌ای باشد آنگاه برد همواره $\mathbb{R}$ است:

حالت اول:

$$x^2 \leq 3x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$-1 \leq a \leq 4$$



حالت دوم:

$$0 \leq 3x + 4 \leq 1$$

$$-4 \leq 3x \leq -3$$

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$$

$$-\frac{4}{3} \leq a \leq -1$$

$$\frac{I \cup II}{\Rightarrow} -\frac{4}{3} \leq a \leq 4 \Rightarrow d - c = 4 - (-\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$$

(گروه مولفان علوی) (برد تابع - تابع) (دشوار)

۲۰- گزینه «۴» -

$$2y - kx = k - 1 \Rightarrow y = \frac{k}{2}x + \frac{k-1}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{k}{2}$$

$$y = (3k-1)x + 2k \Rightarrow m_2 = (3k-1)$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{k}{2} = 3k - 1 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta y - x + \frac{3}{5} = 0 \\ \Delta y - x - \frac{4}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\ell = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{5} + \frac{4}{5}|}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{11}{2\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{26}}{52}$$

(گروه مولفان علوی) (هندسه تحلیلی - فاصله بین دو خط موازی) (متوسط)