

ریاضی و آمار ۱

۱- گزینه «۴» - معادله را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$4x^2 - 4x - 15 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 2(2x) - 15 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + (3-5)(2x) + (3)(-5) = 0 \Rightarrow (2x+3)(2x-5) = 0$$

$$\begin{cases} 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب: } \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

* اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۲ - حل معادله درجه دوم و کاربردها - تجزیه) (دشوار)

۲- گزینه «۱» - مراحل مربع کامل سازی به صورت زیر است:

(۱) جملات شامل متغیر (مجهول x) را به سمت چپ تساوی و عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم.

(۲) در صورت یک نبودن ضریب جمله درجه دوم، تمام جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم.

(۳) نصف ضریب x را به توان دو رسانده و به طرفین اضافه می‌کنیم.

(۴) سمت چپ را با استفاده از اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -3x^2 + 4x + 15 = 0 &\Rightarrow -3x^2 + 4x = -15 \xrightarrow{\div(-3)} x^2 - \frac{4}{3}x = 5 \xrightarrow{+\left(\frac{4}{9}\right)} x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 5 + \frac{4}{9} \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} \xrightarrow{\text{با توجه به روی سؤال}} m = \frac{49}{9} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۲ - حل معادله درجه دوم و کاربردها - روش مربع کامل سازی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - اگر تفاضل ریشه‌ها صفر باشد، آن‌گاه معادله دارای ریشه مضاعف است، پس Δ صفر است. در معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ برابر است با: } \Delta$$

$$\Delta = b^2 - 4ac; \Delta x^2 - bx + 2 = 0$$

$$\Delta = (-b)^2 - 4(\lambda)(2) = 0 \Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8 \xrightarrow{\text{طبق سؤال}} b = 8$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۲ - حل معادله درجه دوم و کاربردها - روش Δ) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - با توجه به شکل، طول و عرض مستطیل هاشور خورده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل} \\ \text{عرض: } 5 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 5 - x \\ \text{طول: } 8 - x - x = 8 - 2x \end{cases}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = (\Delta - x)(8 - 2x) \Rightarrow 24 = (\Delta - x)(8 - 2x) \Rightarrow 24 = 40 - 10x - 8x + 2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \xrightarrow{\text{از اتحاد جمله مشترک}} (x-8)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ ق ق} \\ x = 1 \text{ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \text{ابعاد منفی می‌شود.} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۲ - کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\frac{1}{x-1} = 1 - \frac{x-2}{2} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{2-x+2}{2} \Rightarrow 2 = (x-1)(4-x) \Rightarrow 2 = 4x - x^2 - 4 + x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \checkmark \\ x = 2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow |3-2|=1 \text{ هر دو جواب قابل قبول اند.} \text{ چون مخرج را صفر نمی‌کند.}$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارات‌های گویا) (متوسط)

۶- گزینه «۱» - از اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{x+2}{x^2-x-6} - \frac{x-1}{x^2-1} = -2$$

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = -2 \Rightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} = -2 \Rightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{(x+1) - (x-3) + 2(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = 0$$

$$\Rightarrow x+1-x+3+2(x^2-2x-3) = 0 \Rightarrow 2x^2-4x-2 = 0 \xrightarrow{+2} x^2-2x-1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{هر دو جواب قابل قبول اند، چون مخرج را صفر نمی کند.}$$

معادله ۲ جواب متمایز دارد. (اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارتهای گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$\frac{\frac{1}{2}mx-1}{(x-1)^2} - \frac{mx-6}{x^2-2x-3} = \frac{1}{x^2-1} \xrightarrow{x=2} \frac{m-1}{1} - \frac{2m-6}{-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow m-1 + \frac{2m-6}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3m-3+2m-6=1 \Rightarrow 5m=10 \Rightarrow m=2$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارتهای گویا) (آسان)

۸- گزینه «۳» - ابتدا معادله را به شکل زیر ساده و تجزیه می کنیم:

$$(x-1)(x-6) = \frac{16(x-1)}{x} \xrightarrow{x \neq 0} x(x-1)(x-6) = 16(x-1) \Rightarrow (x(x-6)-16)(x-1) = 0 \Rightarrow (x^2-6x-16)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق ق} \\ x=-2 \text{ ق ق} \Rightarrow 1+(-2)+8=7 \checkmark \\ x=8 \text{ ق ق} \end{cases}$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارتهای گویا) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$\frac{6x-18}{x-3} = 6 \Rightarrow \frac{6(x-3)}{x-3} = 6 \Rightarrow \frac{(x-3)}{x-3} = 1$$

کسر $\frac{x-3}{x-3}$ به ازای تمام اعداد حقیقی به جزء ۳ برابر با ۱ است، در نتیجه جواب معادله عبارت است از: $\mathbb{R} - \{3\}$.

(اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارتهای گویا) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» -

زمان (t) × سرعت (v) = مسافت (x)

$$\begin{cases} (1) \text{ رفت: } 4 = v \times t_{\text{رفت}} \\ (2) \text{ برگشت: } 4 = (v+1) \times t_{\text{برگشت}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{\text{رفت}} = \frac{4}{v} \\ t_{\text{برگشت}} = \frac{4}{v+1} \end{cases}$$

$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 6 \text{ ساعت} \Rightarrow \frac{4}{v} + \frac{4}{v+1} = 6 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v+1}\right) = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v+1}\right) = 3$$

$$\Rightarrow 2(v+1+v) = 3v(v+1) \Rightarrow 3v^2 - v - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 25$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow v = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1+5}{6} = 1 \checkmark \\ v = \frac{1-5}{6} = -\frac{4}{6} \times \end{cases} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(اکبری) (فصل اول - درس ۳ - معادله‌های شامل عبارتهای گویا) (دشوار)