هندسه ۱

۱- گزینه «۱» ــ می‌دانیم در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_b}=\frac{b}{a}+\frac{b}{c}=\frac{۶}{۴}+\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۶+۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

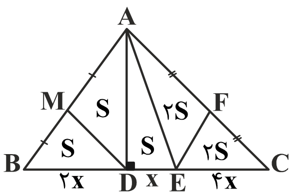
(علوی) (نسبت و تناسب ــ نسبت ارتفاع‌ها) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ــ

$$CE=۴DE=۲BD \Rightarrow DE=x\,,\,CE=۴x\,,\,BD=۲x$$

مثلث‌های ABD، ADE و AEC ارتفاع گذرنده از رأس A یکسان دارند، بنابراین نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت قاعده‌هایشان است.

همچنین میانه DM مساحت مثلث ABD و میانه EF مساحت مثلث AEC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ADE}}=S$$

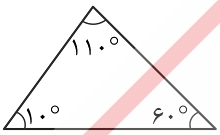
$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=۲S \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADM}}=S_{\overset{\Delta}{BDM}}=S$$

$$S_{\overset{\Delta}{AEC}}=۴S \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AEF}}=S_{\overset{\Delta}{CEF}}=۲S$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{S_{\overset{\Delta}{AEC}}}+\frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{S}{۴S}+\frac{۲S}{۲S}=\frac{۱}{۴}+۱=۱/۲۵$$

(علوی) (نسبت و تناسب ــ نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع یکسان) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ــ مثال نقض گزینه «۱»:



$$۴\times ۱۰^\circ = ۴۰^\circ \ngtr ۱۱۰^\circ$$

مثال نقض گزینه «۲»: مستطیل با طول و عرض نابرابر چهار زاویه قائمه دارد، ولی منتظم نیست.

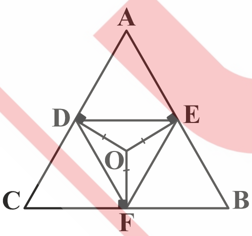
مثال نقض گزینه «۴»: محل همرسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائمه است.

اثبات درستی گزینه «۳»:

$$S=S' \Rightarrow \pi r^۲=\pi r'^۲ \Rightarrow r^۲=r'^۲ \Rightarrow r=r' \Rightarrow ۲\pi r=۲\pi r'$$

(علوی) (استدلال ــ مثال نقض) (آسان)

۴- گزینه «۴» ــ می‌دانیم محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است، بنابراین:



$$OD=OE=OF$$

همچنین می‌دانیم اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد، پس:

OE = OD → O روی عمودمنصف DE است.
OE = OF → O روی عمودمنصف EE است.
OD = OF → O روی عمودمنصف DE است.
⇒ نقطه O همرسی عمودمنصف‌های مثلث DEF می‌باشد.

(علوی) (استدلال ــ همرسی نیمسازها و عمودمنصف‌ها) (دشوار)

۵- گزینه «۱» ـ

$$\frac{a}{b}=k \Rightarrow a=bk\ ,\ \frac{c}{d}=k \Rightarrow c=dk$$

$$\frac{a^3-3c^3}{b^3-3d^3}=\frac{(bk)^3-3(dk)^3}{b^3-3d^3}=\frac{b^3k^3-3d^3k^3}{b^3-3d^3}=\frac{k^3(b^3-3d^3)}{b^3-3d^3}=k^3$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (نسبت و تناسب ـ ویژگی‌های تناسب) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ برای حل سؤال از نامساوی مثلث استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}5-3m<(2m-1)+m\\ m<(2m-1)+(5-3m)\\ 2m-1<m+(5-3m)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6m<-6 \Rightarrow m>1\\ 2m<4 \Rightarrow m<2\\ 4m<6 \Rightarrow m<\frac{3}{2}\end{cases} \xrightarrow[\text{برای } m]{\text{محدوده مشترک}} 1<m<\frac{3}{2}$$

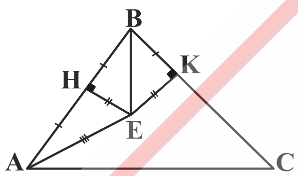
(کتاب همراه علوی) (استدلال ـ نامساوی‌های هندسی) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ اگر طرفین یک وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ یا $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2=ac$. در این صورت b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم، بنابراین می‌توان نوشت:

$$b^2=2/5\times 14/4=\frac{25\times 144}{10\times 10} \Rightarrow b=\frac{5\times 12}{10}=6$$

(کنکور با تغییر) (نسبت و تناسب ـ واسطه هندسی) (آسان)

۸- گزینه «۳» ـ



$E \to EA=EB$ روی عمودمنصف AB است.

$E \to EH=EK$ روی نیمساز $\hat{B}$ است.

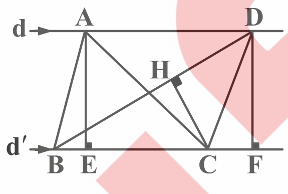
$$\xrightarrow{(\text{وز})} \overset{\Delta}{BEH} \cong \overset{\Delta}{AEH} \cong \overset{\Delta}{BEK}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} BH=AH=BK$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{C}<\hat{A} \Rightarrow AB<BC \Rightarrow 2BK<BK+KC \Rightarrow BK<KC$$

(کنکور با تغییر) (استدلال ـ نامساوی‌های هندسی) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ـ

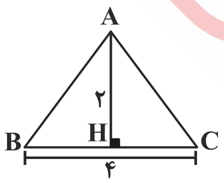


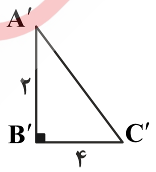
$$\begin{rcases}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AE\times BC\\ S_{\overset{\Delta}{BCD}}=\frac{1}{2}DF\times BC\\ d\parallel d' \Rightarrow AE=DF\end{rcases} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{BCD}}=8 \Rightarrow \frac{1}{2}\times BD\times CH=8 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 6\times CH=8$$

$$\Rightarrow CH=\frac{8}{3}$$

(علوی) (نسبت و تناسب ـ نسبت مساحت‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ قضایای (الف) و (پ) دوشرطی هستند، ولی قضیه (ب) دوشرطی نیست؛ یعنی اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، دلیلی ندارد، حتماً همنهشت باشند. برای نمونه به دو مثلث زیر توجه کنید:





(علوی) (استدلال ـ مفهوم قضیه دوشرطی) (متوسط)