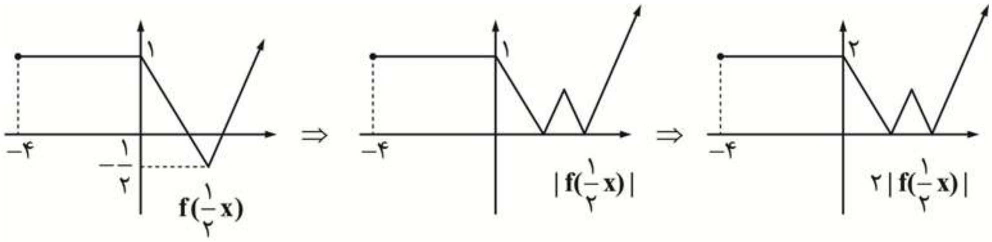
ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ مراحل تبدیل تابع به‌صورت زیر است.

$$f(x) \Rightarrow f(\frac{1}{2}x) \Rightarrow |f(\frac{1}{2}x)| \Rightarrow 2|f(\frac{1}{2}x)|$$



دامنه و برد به‌صورت زیر است:

$$D_g = [-4, +\infty), R_g = [0, +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل توابع)

۲- گزینه «۳» ـ

$$\frac{1+f(1-2x)}{x-g(1-1-2)} = x-1 \Rightarrow \frac{1+(1-2x)^2-(1-2x)-2}{x-(1-2\times(-2))} = x-1$$

$$\Rightarrow \frac{1+1-4x+4x^2-1+2x-2}{x-5} = x-1 \Rightarrow 4x^2-2x-1 = x^2-6x+5 \Rightarrow 3x^2+4x-6=0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$$ **دو ریشه حقیقی دارد**

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ترکیب دو تابع)

۳- گزینه «۳» ـ

$$x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0$$

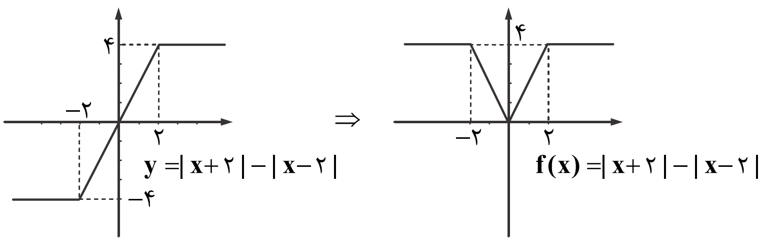
x		0		1	
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

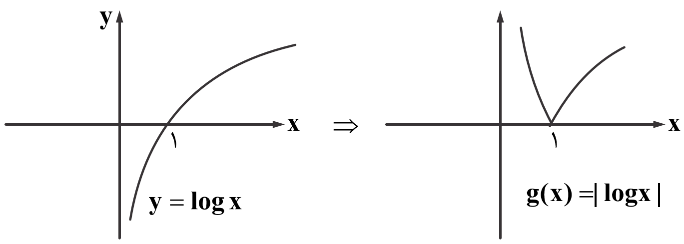
$$x-x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 1-x \leq 2 \xrightarrow{-1} -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$$

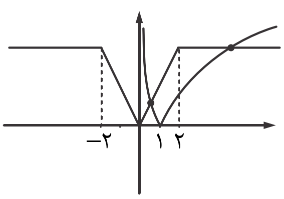
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ترکیب)

۴- گزینه «۳» ـ





اگر دو تابع را در یک دستگاه رسم کنیم تعداد نقاط برخورد معلوم می‌شود.



دو تابع در دو نقطه مشترک‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ رسم $|f(x)|$)

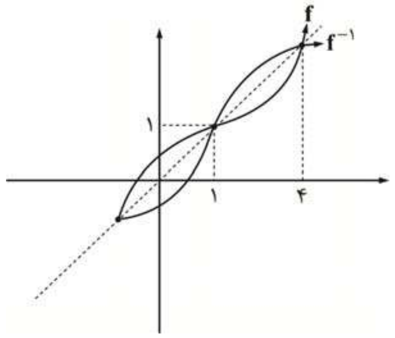
۵- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=y=۳x+۲ \Rightarrow y-۲=۳x \Rightarrow x=\frac{y-۲}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۳}$$

$$(f^{-۱}og)(x)=f^{-۱}(\sqrt{x-۱})=\frac{\sqrt{x-۱}-۲}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون و ترکیب)

۶- گزینه «۱» ـ نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به $y=x$ متقارنند و ضمناً طول و عرض نقاط برخورد آن‌ها برابرند زیرا روی خط $y=x$ قرار دارند.



$$۲-a=a \Rightarrow a=۱$$

$$f^{-۱}(x)>x \Rightarrow ۱<x<۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون)

۷- گزینه «۳» ـ چون دهانه سهمی رو به بالاست پس سهمی در فاصله $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$ اکیداً نزولی است.

$$-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}}=۴ \Rightarrow D_f=(-\infty, ۴]$$

دراین‌حالت برد تابع f با دامنه محدود شده آن برابر $[-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty)$ یا $[f(۴), +\infty)$ خواهد بود.

$$f(۴)=\frac{۱۶}{۲}-۴\times۴=۸-۱۶=-۸ \Rightarrow R_f=[-۸, +\infty)$$

$$y=\frac{x^۲}{۲}-۴x \xrightarrow{\times۲} ۲y=x^۲-۸x \xrightarrow{+۱۶} ۲y+۱۶=(x-۴)^۲ \Rightarrow \sqrt{۲y+۱۶}=|x-۴|$$

$$\xrightarrow{x\le۴} \sqrt{۲y+۱۶}=۴-x \Rightarrow x=۴-\sqrt{۲y+۱۶} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۴-\sqrt{۲x+۱۶}$$

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[-۸, +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون)

۸- گزینه «۲» ـ

$$|\frac{a+۱}{a-۱}|=۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+۱}{a-۱}=۲ \Rightarrow ۲a-۲=a+۱ \Rightarrow a=۳ \\ \frac{a+۱}{a-۱}=-۲ \Rightarrow a+۱=-۲a+۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\max g(x)=|a+\frac{۱}{a}|=۳+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ ماکزیمم و مینیمم)

۹- گزینه «۳» ـ

$$T_{f(x)}=۲T_{g(x)}=۲\times\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۱۲$$

$$T_{۳f(\frac{x}{۲})}=۲T_{f(x)}=۲۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تناوب)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=(\sqrt{۲}+۱)\sin x+\sqrt{۲} \Rightarrow \max(f(x))=\sqrt{۲}+|\sqrt{۲}+۱|=۲\sqrt{۲}+۱$$

$$g(x)=\sqrt{۲}\cos x-۲ \Rightarrow \min g(x)=-۲-|\sqrt{۲}|=-۲-\sqrt{۲}$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{-۲-\sqrt{۲}}=\frac{-(۲\sqrt{۲}+۱)}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{-(۴\sqrt{۲}-۴+۲-\sqrt{۲})}{۴-۲}=\frac{۲-۳\sqrt{۲}}{۲}=۱-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ بیشترین و کمترین مقدار)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=a+b\cos x$$

$$f(\frac{۷\pi}{۳})=\circ \Rightarrow a+b\cos\frac{۷\pi}{۳}=\circ \Rightarrow a+\frac{b}{۲}=\circ$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است:

$$a+|b|=۳$$

با توجه به نمودار کسینوس، $b<\circ$ است پس:

$$\begin{cases} a+\frac{b}{۲}=\circ \Rightarrow a=-\frac{b}{۲} \\ a-b=۳ \Rightarrow -\frac{b}{۲}-b=۳ \Rightarrow b=-۲ \end{cases}$$

(سراسری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تناوب)

۱۲- گزینه «۴» ـ با توجه به نمودار a و b مختلف‌العلامتند، چون نسبت $\frac{a}{b}$ را خواسته است. b را مثبت و a را منفی در نظر می‌گیریم.

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۹\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{b>\circ} b=\frac{۱}{۳}$$

بیشترین و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب ۱ و ۳- است:

$$\begin{cases} c+|a|=۱ \\ c-|a|=-۳ \end{cases} \xrightarrow{a<\circ} \begin{cases} c-a=۱ \\ c+a=-۳ \end{cases} \xrightarrow{-} -۲a=۴ \Rightarrow a=-۲$$

$$\frac{a}{b}=\frac{-۲}{\frac{۱}{۳}}=-۶$$

(سراسری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تناوب)

۱۳- گزینه «۱» ـ اگر α در بازه $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ قرار گیرد آن‌گاه $\tan\alpha>۱$ خواهد بود پس:

$$\frac{۱}{m+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۱}{m+۱}-۱>\circ \Rightarrow \frac{-m}{\underbrace{m+۱}_{p(m)}}>\circ$$

m		۱-		∘	
p(m)	−	ت ن	+	∘	−

$$p(m)>\circ \Rightarrow -۱<m<\circ$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تانژانت)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲+(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=۲$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲+\frac{۱}{۱۶}=۲ \Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۳۱}{۱۶} \Rightarrow |\sin\alpha-\cos\alpha|=\frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ روابط)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=۲ \Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=۲\sin\alpha-۲\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha=۳\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha=۳ \Rightarrow \cot\alpha=\frac{۱}{۳}$$

$$A=\tan\alpha+۲\cot\alpha=۳+\frac{۲}{۳}=\frac{۱۱}{۳}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ روابط)

۱۶- گزینه «۲» ـ

$$S(\Delta BDC)=\frac{۱}{۲}BC\times DC\sin ۴۵^\circ=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۵\times DC\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۵ \Rightarrow DC=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

$$S(\Delta ABC)=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times(۲+۲\sqrt{۲})\times ۵\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=(۱+\sqrt{۲})\times\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۵}{۲}(۲+\sqrt{۲})$$

$$S(\Delta ABD)=\frac{۵}{۲}(۲+\sqrt{۲})-۵=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ مساحت)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$$A=\sin^۶\alpha+۳\sin^۲\alpha\cos\alpha+۳\cos^۲\alpha\sin\alpha+\cos^۶\alpha \Rightarrow A=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۳=(۱)^۳=۱$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ روابط)

۱۸- گزینه «۲» ـ شیب این خط برابر $\tan ۴۵^\circ$ یعنی برابر ۱ است.

$$\frac{۲m}{m+۱}=۱ \Rightarrow ۲m=m+۱ \Rightarrow m=۱$$

(نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ شیب خط)

۱۹- گزینه «۲» ـ چون $۱+k^۲$ و $۲+k^۲$ همواره مثبت و $\sin\alpha=\dfrac{۱+k^۲}{۲+k^۲}$ است پس $\sin\alpha>۰$ است.

$$\tan\alpha=-۱-\sin^۴\alpha<۰$$

$\sin\alpha>۰$ و $\tan\alpha<۰$ است پس α در ناحیه دوم قرار دارد. (نصیری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ دایره مثلثاتی)

۲۰- گزینه «۴» ـ اگر شعاع دایره r و زاویه قطاع θ بر حسب رادیان فرض شود:

$$|\widehat{AB}|=r\theta=r\times\frac{\pi}{۳}$$

$$\text{محیط}=۲r+\frac{r\pi}{۳}=\frac{r}{۳}(\pi+۶)=\frac{۴}{۳}(\pi+۶) \Rightarrow r=۴$$

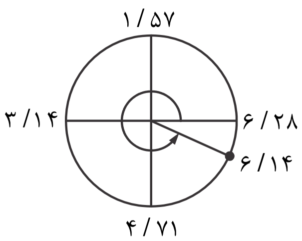
$$S=\pi r^۲=۱۶\pi$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ رادیان)

۲۱- گزینه «۴» ـ از آن‌جایی که $\pi \simeq ۳/۱۴$ است پس:

$$\alpha=\pi+۳\simeq ۶/۱۴\ \text{rad}$$

به دایره مثلثاتی زیر که بر حسب رادیان تقریبی تنظیم شده است توجه کنید.



ملاحظه می‌کنید که ۶/۱۸ رادیان در ناحیه چهارم قرار دارد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ دایره مثلثاتی)

۲۲- گزینه «۱» ـ

$$\sin(3x+4y)=\sin(3(x+y)+y)=\sin(90^\circ+y)=\cos y$$

$$\cos(6x+7y)=\cos(6(x+y)+y)=\cos(180^\circ+y)=-\cos y$$

$$A=\cos y-\cos y=0$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ تغییر زاویه)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$\alpha+4\alpha=5\alpha=90^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\cos 4\alpha$$

$$3\alpha+7\alpha=10\alpha=180^\circ \Rightarrow \cos 3\alpha=-\cos 7\alpha$$

$$11\alpha+9\alpha=20\alpha=360^\circ \Rightarrow \tan 11\alpha=-\tan 9\alpha$$

$$A=\frac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos 7\alpha}+\frac{\tan 11\alpha}{\tan 9\alpha}=1-1-1=-1$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ تغییر زاویه)

۲۴- گزینه «۲» ـ واحدها درجه می‌باشند.

$$\tan(300)=\tan(360-60)=-\tan 60=-\sqrt{3}$$

$$\cos(210)=\cos(180+30)=-\cos 30=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(480)=\tan(360+120)=\tan 120=\tan(180-60)=-\tan 60=-\sqrt{3}$$

$$\sin(840)=\sin(720+120)=\sin 120=\sin(180-60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

(سراسری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ تغییر زاویه)

۲۵- گزینه «۴» ـ

$$A=\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\left(2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\sin^2 x\right)=\frac{1}{|\cos x|}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2 x)=\frac{1-\sin^2 x}{|\cos x|}=\frac{\cos^2 x}{|\cos x|}$$

چون $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ است یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و در نتیجه $|\cos x|=-\cos x$ است، پس:

$$A=\frac{\cos^2 x}{-\cos x}=-\cos x$$

(سراسری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ روابط)