ریاضی

۱- گزینه «۱» ـ در مثلث BDC داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{|BD|}{|BC|} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{m-۱}{m+۱} \Rightarrow m+۱ = ۲m-۲ \Rightarrow m=۳$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{|DC|}{|BC|} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{n}{۴} \Rightarrow n = ۲\sqrt{۳}$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲}|BC|\times|AC|\times\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times ۴\times(۲\sqrt{۳}+۲)\times\frac{۱}{۲} = ۲(\sqrt{۳}+۱)$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ مساحت) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ

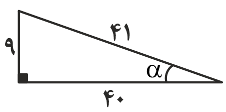
$$S_{ABCF} = ۹\times S_{CDE} \Rightarrow (m+۳)(m+۱)\sin\hat{C} = \frac{۱}{۲}\times۱\times۲\times۹\times\sin\hat{C} \Rightarrow m^۲+۴m+۳=۹ \Rightarrow m^۲+۴m-۶=۰$$

$$\xrightarrow{m>۰} m = \sqrt{۱۰}-۲$$

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۲(m+۳+m+۱) = ۲(۲m+۴) = ۴(\sqrt{۱۰}-۲+۲) = ۴\sqrt{۱۰}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ مساحت) (متوسط)

۳- گزینه «۲» ـ شیب خط L برابر $\frac{۹}{۴۰}$ است. مثلث قائم الزاویه‌ای برای زاویه α در نظر می‌گیریم به طوری که $\tan\alpha = \frac{۹}{۴۰}$ باشد.



توجه کنید که اعداد ۹، ۴۰ و ۴۱ فیثاغورسی هستند. پس $\sin\alpha = \frac{۹}{۴۱}$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ شیب خط) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ از یک اتحاد مثلثاتی مهم استفاده می‌کنیم.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲+(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲ = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}+(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲ = ۲ \Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^۲ = \frac{۳۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow |\sin\alpha-\cos\alpha| = \frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ روابط مثلثاتی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» ـ

$$\alpha+\beta = \frac{۵\pi}{۲۸}+\frac{۳\pi}{۴} = \frac{۵\pi+۲۱\pi}{۲۸} = \frac{۱۳\pi}{۱۴} = \pi-\frac{\pi}{۱۴}$$

$\alpha+\beta$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ رادیان) (آسان)

۶- گزینه «۲» ـ اگر دو زاویه α و β متمم باشند، $\tan\alpha = \cot\beta$ است.

$$۲t+\frac{\pi}{۷}+t+\frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۳t = \frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۷} = \frac{۲۸\pi-۷\pi-۸\pi}{۵۶} \Rightarrow t = \frac{۱۳\pi}{۱۶۸}$$

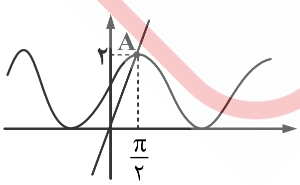
(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ تغییر زاویه) (آسان)

۷- گزینه «۴» ـ

$$A = \tan(-۲۲۵^\circ)\cot(-۳۳۰^\circ) = \tan ۲۲۵^\circ\cot ۳۳۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)\cot(۳۶۰-۳۰^\circ) = \tan(۴۵^\circ)\cot(-۳۰^\circ) = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ تغییر زاویه) (آسان)

۸- گزینه «۱» ـ تابع $\sin x$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x)$ به‌دست آید. تابع g هم یک خط راست و گذرا از $(۰,۰)$ و $(\frac{\pi}{۲},۲)$ است.



دو تابع f و g در یک نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ نمودار مثلثاتی) (متوسط)

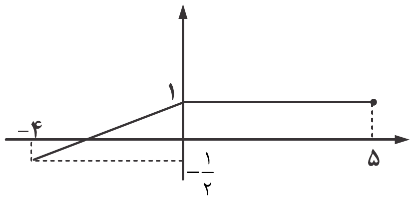
۹- گزینه «۱» ـ مراحل تغییر تابع را ببینید:

$$f(x) \to f(x-۱) \to ۲f(x-۱)$$

$$۲f(x-۱) = x+۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x} = x+۱ \Rightarrow ۴x = x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

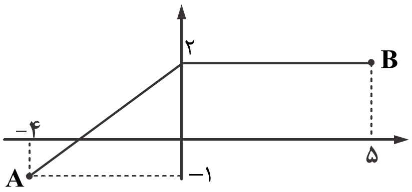
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:



$y = f(x) - ۱$

حال عرض نقاط نمودار به‌دست آمده را دو برابر می‌کنیم. دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کنیم:



معادله آن را نیز می‌نویسیم:

$$A(-۴,-۱), B(۵,۲) \Rightarrow m_{AB} = \frac{۲+۱}{۵+۴} = \frac{۱}{۳}$$

$$AB: y-۲ = \frac{۱}{۳}(x-۵) \xrightarrow{y=۰} -۶ = x-۵ \Rightarrow x=-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ـ

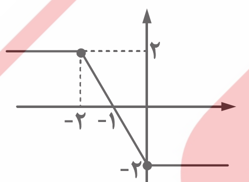
$$A \in (y = f(\frac{۱-x}{۲})) \Rightarrow f(\frac{۱+۱}{۲}) \Rightarrow f(۱)=۲ \Rightarrow (۱,۲) \in f(x)$$

در تابع $g(x) = f(x) + f(۲x-۱)$ به جای x عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$g(۱) = f(۱)+f(۱) = ۲f(۱) = ۲\times۲ = ۴ \Rightarrow (۱,۴) \in g$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (دشوار)

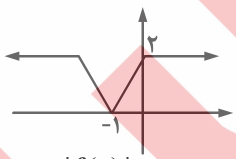
۱۲- گزینه «۴» ـ ابتدا نمودار $f(x) = |x| - |x+۲|$ را رسم می‌کنیم:



$y = f(x)$

x	۰	−۲
y	−۲	۲

حال قسمتی از نمودار که زیر محور xها قرار دادر را به بالای محور متقارن می‌کنیم:



$y = |f(x)|$

برد تابع g برابر $[۰, ۲]$ خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ رسم $|f(x)|$) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$\frac{۳m+۱}{m+۲} = ۲ \Rightarrow ۳m+۱ = ۲m+۴ \Rightarrow m=۳ \Rightarrow m^۲ = ۹$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$y = \frac{۴x-۱}{x+۲} \Rightarrow yx+۲y = ۴x-۱ \Rightarrow yx-۴x = -۱-۲y \Rightarrow x(y-۴) = -۱-۲y \Rightarrow x = \frac{۲y+۱}{۴-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x+۱}{۴-x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تابع وارون) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$f(x)=x \Rightarrow x^{۲}+x+۱=x \Rightarrow x^{۲}=-۱$ (فاقد ریشه حقیقی)

بنابراین تابع f و $f^{-۱}$ متقاطع نیستند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تابع وارون) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$T_f=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳\pi}{۲}\,,\,T_g=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۵}}=۵\pi\,,\,T_h=\frac{۲\pi}{۳}\,,\,T_t=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تناوب) (آسان)

۱۷- گزینه «۲» ـ

$$\frac{۲\pi}{|\frac{m}{۲}|}=\pi \Rightarrow |m|=۴ \Rightarrow \max(y)=۴+۱=۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» ـ

$$A=\frac{۱+|-۳|}{۱-|-۳|}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار) (آسان)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$\begin{cases}\max f(x)=۴\\ \min f(x)=-۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m+|a|=۴\\ m-|a|=-۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=-۱\\ |a|=۵\end{cases}$$

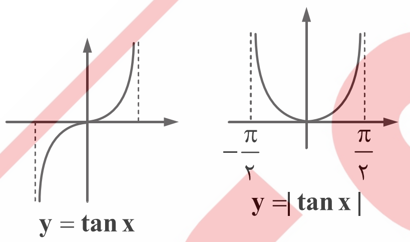
$$T_f=\frac{۲\pi}{|b|}=۲\pi \Rightarrow |b|=۱$$

در این مسئله $a+b+m$ زمانی بیش‌ترین است که $a\,,b>۰$ باشد، پس:

$$\max(a+b+m)=-۱+۵+۱=۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار) (آسان)

۲۰- گزینه «۴» ـ نمودار تابع $\tan x$ در بازه $(-\frac{\pi}{۲}\,,\frac{\pi}{۲})$ را رسم می‌کنیم و قسمتی از تابع که زیر محور xها قرار دارد را به بالای محور xها متقارن می‌کنیم:



$$-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (آسان)

۲۱- گزینه «۲» ـ با شرط $x\neq ۰$ بایستی $\frac{\pi}{x}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\,(k\in\mathbb{Z})$ باشد:

$$\frac{\pi}{x}\neq\frac{۲k\pi+\pi}{۲} \Rightarrow x\neq\frac{۲}{۲k+۱}\,،\,k\in\mathbb{Z}$$

پس دامنه تابع:

$$D_f=\{x\neq ۰\,|\,x\neq\frac{۲}{۲k+۱}\,,k\in\mathbb{Z}\}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (متوسط)

۲۲- گزینه «۴» ـ در همه نقاط تعریف شده $|\sin x|\leq|\tan x|$ است، در بازه‌هایی که $\sin x>۰$ و $\tan x<۰$ است، $\sin x>\tan x$ است، در ناحیه دوم مثلثاتی $\sin x>\tan x$ است، ضمناً در ناحیه سوم $\tan x>\sin x$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تابع تانژانت) (متوسط)

۲۳- گزینه «۲» ـ

$$(\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha)+(\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha)=(۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha)+(۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha)=۲-۵\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A=۲\\ B=-۵\end{cases} \Rightarrow A+B=-۳$$

(نصیری) (پایه دهم ـ مثلثات ـ اتحادها) (متوسط)

۲۴- گزینه «۳» ـ

$$a^{۲}+\tan^{۲}۱۰^\circ-۲a\tan ۱۰^\circ=۰ \Rightarrow (a-\tan ۱۰^\circ)^{۲}=۰ \Rightarrow \tan ۱۰^\circ=a$$

$$A=\frac{\sin(۱۸۰^\circ+۱۰^\circ)+\cos(۱۸۰^\circ-۱۰^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ+۱۰^\circ)+\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}=\frac{-\sin ۱۰^\circ-\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}=\frac{-\sin ۱۰^\circ}{۲\cos ۱۰^\circ}-\frac{\cos ۱۰^\circ}{۲\cos ۱۰^\circ}=-\frac{۱}{۲}\tan ۱۰^\circ-\frac{۱}{۲}=\frac{-a-۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ تغییر زاویه) (متوسط)

۲۵- گزینه «۳» ـ

$$x+y=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\cos y=\sin x\\ \sin y=\cos x\end{cases} \Rightarrow A=(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)^{۱۴۰۱}=(۱)^{۱۴۰۱}=۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ مثلثات ـ زوایای متمم) (آسان)