

ریاضی

۱- گزینه «۴» - تابع $f(x)$ در بازه $[\frac{1}{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

$$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2x - 1 - x = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 1, \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

$$f(x) = -1 \Rightarrow a - b\sqrt{3} = -1 \quad (1)$$

$$\max(y) = 2 \xrightarrow{b > 0} a + b\sqrt{3} = 2 \quad (2)$$

تفاضل رابطه‌های (۱) و (۲) را حساب می‌کنیم.

$$b\sqrt{3} + b\sqrt{3} = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - نمودارهای مثلثاتی) (آسان)

۳- گزینه «۳» -

$$f(x) = 2 \Rightarrow 3x + 1 + \sqrt{3x + 1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x + 1} = 1 - 3x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

$$f(x) = 6 \Rightarrow 3x + 1 + \sqrt{3x + 1} = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x + 1} = 5 - 3x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f^{-1}(6) = 1$$

$$f^{-1}(2) + f^{-1}(6) = 0 + 1 = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۴- گزینه «۲» - تغییرات تابع به صورت زیر است:

$$g(x) \longrightarrow g(x+2) \longrightarrow g(2x+2)$$

$$h(x) = g(2x+2) = f(4 - (2x+2)) = f(2-2x)$$

$$h(2t-1) = f(2 - (2(2t-1))) = f(4-4t)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تبدیل توابع) (متوسط)

۵- گزینه «۱» - فاصله هر دو $\min$ متوالی برابر یک دوره تناوب است.

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

بنابراین طول $\min$ ها برابر $0, 2, 4, 6, 8, \dots$ و ... است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - دوره تناوب) (متوسط)

۶- گزینه «۱» - نمودار داده شده از قرینه تابع $\cos x$ ساخته شده است بنابراین:

$$\frac{1+m}{3+m} < 0 \Rightarrow -3 < m < -1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - تابع متناوب) (متوسط)

۷- گزینه «۱» -

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x + \frac{\sin^2 x - 1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = k - \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$$

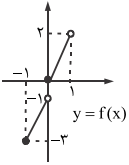
$$T_g = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{6}} = \frac{12}{7}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - دوره تناوب) (متوسط)

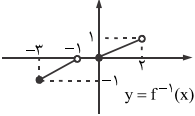
۸- گزینه «۱» -

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x$$



نمودار f^{-1} به صورت زیر است.



(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تابع وارون) (متوسط)

۹- گزینه «۴» -

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2k+1)$$

مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$ در دامنه تابع قرار ندارد.

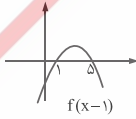
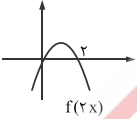
$$(4x - \pi)(-4x + \Delta\pi) > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\Delta\pi}{4}$$

بنابراین دامنه تابع $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\} - \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\Delta\pi}{4}\right)$ است.

$$a + b + c = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\Delta\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - تابع تناوب) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» - نمودار توابع $f(x)$ و $f(x-1)$ را رسم می‌کنیم.



اکنون عبارت $\frac{f(2x)}{f(x-1)}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

x	0	1	2	Δ
$\frac{f(2x)}{f(x-1)}$	+	0	-	+
$f(x-1)$	+	0	-	+

$$\frac{f(2x)}{f(x-1)} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (1, 2] \cup (\Delta, +\infty)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل اول - تبدیل توابع) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» -

$$a + |-3| = 2(a - |-3|) \Rightarrow a + 3 = 2a - 6 \Rightarrow a = 9$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{a}{a+1}\right|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{9}{10}\right|} = \frac{20\pi}{9}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - دوره تناوب) (آسان)

۱۲- گزینه «۲» -

$$y = \sin^2 x - 4 \sin x + 4 - 4 = (\sin x - 2)^2 - 4$$

$$-3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \Rightarrow 1 \leq (\sin x - 2)^2 \leq 9 \xrightarrow{-4} -3 \leq y \leq 5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - بیشترین مقدار) (دشوار)

۱۳- گزینه «۱» -

$$T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

$$\max y = \pi + 1$$

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - فصل ۲ - دوره تناوب) (آسان)

۱۴- گزینه «۱» - تابع تناؤانت در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیدا صعودی است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - تابع تناؤانت) (آسان) (کتاب درسی)

۱۵- گزینه «۲» - در ناحیه‌ای که تناؤانت منفی است، سینوس بیشتر است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - تابع تناؤانت) (آسان) (کتاب درسی)

۱۶- گزینه «۳» -

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 6 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 6 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 6$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right)^2 = \frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{6}}{1 + 2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل دوم - روابط مثلثاتی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۱» -

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - y^2 = 1$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 4xy = 1$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل دوم - روابط مثلثاتی) (آسان)

۱۸- گزینه «۴» -

$$\tan 30^\circ = m_{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2-2m} \Rightarrow 2-2m=3$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow C(-1, 2), D(4, 1)$$

شیب خط گذرنده از C و D را حساب می‌کنیم.

$$\tan \alpha = m_{CD} = \frac{2-1}{-1-4} = -\frac{1}{5}$$

چون $\tan \alpha < 0$ است پس α متفرجه خواهد بود.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

(نصیری) (پایه دهم - فصل دوم - شیب خط و روابط مثلثاتی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$\frac{\tan \alpha + 2}{3 \tan \alpha - 1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 1 \cdot \tan \alpha + 2 = 3 \tan \alpha - 1$$

$$\Rightarrow 7 \tan \alpha = -3 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{7}$$

به‌ازای هر x عبارت‌های $x^2 + x + 1$ و $x^3 + 1$ همواره مثبت‌اند بنابراین $\sin \alpha > 0$

است پس α در ناحیه دوم قرار دارد. (نصیری) (پایه دهم - فصل دوم - دایره مثلثاتی) (دشوار)

۲۰- گزینه «۱» -

$$\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{m-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m-1} > 0 \Rightarrow m > 1 \\ \frac{1}{m-1} < 1 \Rightarrow \frac{2-m}{m-1} < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده $(2, +\infty)$ است.

(نصیری) (پایه دهم - فصل چهارم - دایره مثلثاتی) (متوسط)

۲۱- گزینه «۳» -

$$t_1 = [\sin 2][\cos 1] = (0)(0) = 0$$

$$t_2 = [\sin 4][\cos 2] = (-1)(-1) = 1$$

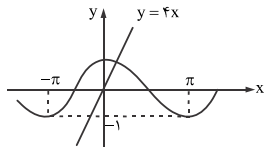
$$t_3 = [\sin 6][\cos 3] = (-1)(-1) = 1$$

مجموع ۳ جمله اول برابر ۲ است.

(نصیری) (پایه دهم - فصل چهارم - رادیان) (متوسط)

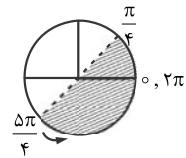
۲۲- گزینه «۲» - $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ برابر $\cos x$ است. خط $y = 4x$ تابع $\cos x$ را فقط در یک

نقطه قطع کرده است.



(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - نمودار توابع مثلثاتی) (آسان)

۲۳- گزینه «۲» - نواحی که $\cos x > \sin x$ را در شکل زیر هاشور زده‌ایم.



زاویه $\frac{3\pi}{4}$ در ناحیه فوق قرار دارد.

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - دایره مثلثاتی) (متوسط)

۲۴- گزینه «۱» -

$$\cot x = \frac{-\sin(4\pi + \frac{3\pi}{2} - x) + \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{-\sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل چهارم - تغییر زاویه) (آسان)

۲۵- گزینه «۴» - چون C وسط BD است پس $CD = \frac{1}{2} BD$ خواهد بود.

$$\Delta ABC: AC^2 = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

اگر اندازه کمان AD برابر ℓ باشد.

$$\ell = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین محیط بخش هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\pi + \sqrt{5} + 1)$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل ۴ - اندازه کمان) (متوسط)