

ریاضی

۱- گزینه «۳» - با توجه به رابطه مساحت خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 3$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دهم - مثلثات - مساحت مثلث) (آسان)

۲- گزینه «۱» - با توجه به نقطه $A(0, -2)$ و شیب خط $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ داریم:

$$m = \sqrt{3}, A(0, -2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{3}x - 2 \leftarrow \frac{x - \sqrt{3}}{y + 2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = 1$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دهم - مثلثات - معادله خط و شیب آن) (متوسط)

۳- گزینه «۲» - ابتدا به کمک رابطه $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ داریم:

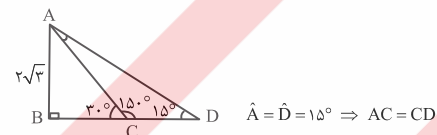
$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

(حاشی) (پایه دهم - مثلثات - رابطه مثلثاتی) (دشوار)

۴- گزینه «۴» - مطابق شکل می توان نوشت:

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 6$$



$$\Delta ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 12 + 36 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AC = CD = 4\sqrt{3}$$

یا بگوییم که در مثلث ABC زاویه متقابل به راس 30° نصف وتر و $AC = 4\sqrt{3}$ است.

$$\Rightarrow BD = BC + CD = 6 + 4\sqrt{3}$$

(کتاب علوی با تغییر) (پایه دهم - مثلثات - زوایای مثلثاتی در مثلث) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$-20^\circ < x < 20^\circ \Rightarrow -60^\circ < 3x < 60^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

(کتاب علوی با تغییر) (پایه دهم - مثلثات - زوایا و دایره مثلثاتی) (متوسط)

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ و } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ مثلثاتی}$$

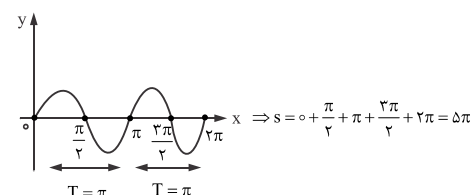
و رسیدن به عوامل قدرمطلق و توجه به ناحیه دوم دایره مثلثاتی خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{|\cos x|} + \frac{1}{|\sin x|} = \frac{-1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x}$$

(حاشی) (پایه دهم - مثلثات - روابط مثلثات) (متوسط)

۷- گزینه «۳» -

$$y = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



(کتاب علوی) (پایه دوازدهم - مثلثات - تناوب تابع و نمودار مثلثاتی) (متوسط)

۸- گزینه «۴» -

$$y = 1 - \sin(mx) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3 \xrightarrow{m > 0} m = 3$$

$$\Rightarrow y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y = 1 - \sin 3\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$y = 1 - \sin\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 - (-1) = 2$$

(سرآبری) (پایه دوازدهم - مثلثات - نمودار توابع مثلثاتی) (دشوار)

۹- گزینه «۳» - می دانیم مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و با اندازه کمان θ برحسب

رادیان برابر $\frac{1}{2} r^2 \theta$ می باشد.

$$\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (6)^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{2}$$

(کتاب علوی) (پایه یازدهم - مثلثات - مساحت قطاع بر حسب رادیان) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» - داریم:

$$\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\sin 70^\circ = \sin(720^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos 20^\circ = \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} \xrightarrow{+(-\cos 20^\circ)} A = \frac{1 + \tan 20^\circ}{1 - \tan 20^\circ} = \frac{1+k}{1-k}$$

(سرآبری با تغییر) (پایه یازدهم - مثلثات - زوایای مثلثاتی غیر مشخص) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» - می دانیم:

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

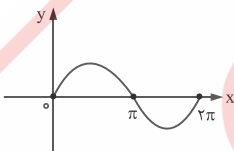
$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} - (-\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

(کتاب درسی) (پایه یازدهم - مثلثات - تبدیلات زوایای مثلثاتی) (آسان)

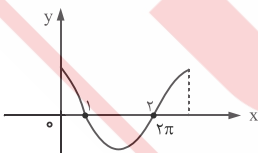
۱۲- گزینه «۲» - می دانیم با انتخاب $m = 1$ نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ محور

طول ها را در سه نقطه قطع می کند، مطابق نمودار داریم:



بنابراین با $m = 1$ به نمودار $y = \cos x$ می رسمیم که در این بازه محور طول ها را فقط در ۲

نقطه قطع خواهد کرد.



(حاشی) (پایه یازدهم - مثلثات - نمودار توابع مثلثاتی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» - با کمک روابط ماکزیمم و مینیمم می توان نوشت:

$$y_{\max} = |n| + m = 4$$

$$y_{\min} = -|n| + m = 2$$

$$2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

(حاشی) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - ابتدا دوره تناوب تابع $f(x)$ را می‌یابیم که چون ضریب عددی سینوس و عدد ثابت ۳ در تناوب آن تاثیری ندارند؛ برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}$$

$$g(x) = \sin ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

(سراسری یا تغییر) (پایه دوازدهم - مثلثات - تعیین دوره تناوب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» -

$$y_{\max} = a = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{3}$$

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}(a + b) = \frac{7}{9}$$

(سراسری یا تغییر) (پایه دوازدهم - مثلثات - نمودار مثلثاتی و تناوب‌ها) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» -

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\cos(\pm \frac{1}{2}x) \Rightarrow f(\pi) = \frac{1}{2} + 2\cos(\pm \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - مثلثات - نمودار و تناوب آن‌ها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - با توجه به عبور منحنی از نقاط $(0, 0)$ و $(1, 2)$ خواهیم داشت:

$$(0, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + b(1) \Rightarrow a + b = 0$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - مثلثات - نمودار توابع مثلثاتی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» - می‌دانیم $1 \leq \sin u \leq -1$ می‌باشد بنابراین ماکزیمم تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = 2 + 4(1) = 6$$

و همچنین $1 \leq \cos u \leq -1$ بوده و برای مینیمم تابع $g(x)$ داریم:

$$g(x) = 1 - 2(1) = -1$$

که ۷ واحد اختلاف فاصله دارند.

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - مثلثات - ماکزیمم و مینیمم در توابع مثلثاتی) (اسان)

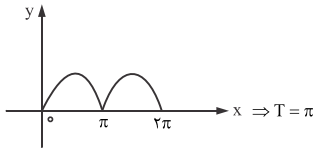
۱۹- گزینه «۳» - نمودار تابع در بازه $[0, 2]$ به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. بنابراین هر

قسمت یا ناحیه این بازه طولی برابر $\frac{2}{3}$ دارد؛ در کل نمودار شامل چهار قسمت مساوی یا

$$\text{ناحیه است که } T = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ خواهد بود.}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب روی نمودار تابع) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» - دوره تناوب کم‌ترین بازه‌ای است بر روی محور طول‌ها که نمودار تابع دقیقاً تکرار می‌گردد. توابع قدرمطلق در سینوس و کسینوس تناوب تابع را نصف می‌کنند. (براساس نمودار آن‌ها) بنابراین دوره تناوب توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر $T = \pi$ خواهد بود؛ مانند نمودار تابع $y = \sin x$



ولی در تابع $f(x) = \sin x + |\cos x|$ مطابق گزینه $T = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود زیرا:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$f(x + T) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + |\cos(x + \frac{\pi}{2})| = \cos x + |-\sin x| =$$

$$|\sin x| + |\cos x| = f(x)$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - مثلثات - دوره تناوب تابع) (متوسط)

۲۱- گزینه «۱» - می‌دانیم ضریب عددی ۳ و جمع با عدد یک در دامنه تابع حاصل تاثیری ندارد و خواهیم داشت:

$$-3 \leq 2x - 1 \leq 7 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x \leq 8 \xrightarrow{+2} -1 \leq x \leq 4$$

$$\text{یعنی } \alpha = -1 \text{ و } \beta = 4 \text{ و حاصل } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{4} \text{ خواهد بود.}$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - تبدیل - تبدیل افقی نمودارها) (متوسط)

۲۲- گزینه «۳» - برای انتقال افقی یک واحد در جهت مثبت محور طول‌ها داریم:

$$y = 2(x-1)^2 + (x-1) = 2(x^2 - 2x + 1) + x - 1 = 2x^2 - 4x + 2 + x - 1 =$$

$$2x^2 - 3x + 1$$

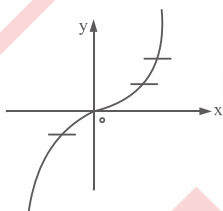
و سپس با تقارن آن نسبت به محور y یعنی یافتن $f(-x)$ خواهیم داشت:

$$g(x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow g(1) = 6$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - تبدیل - انتقال‌های توابع) (متوسط)

۲۳- گزینه «۳» - با توجه به نمودار توابع در گزینه‌ها و این که شرط وارون‌پذیری تابع آن است که یک به یک باشد گزینه سوم را انتخاب می‌کنیم.

$$h(x) = x |x|$$



(حتمی) (پایه دوازدهم - تابع وارون - نمودار وارون‌پذیری) (متوسط)

۲۴- گزینه «۴» - می‌بایستی متناظر نقطه A یعنی $A'(2, 17)$ بر روی تابع f باشد می‌توان نوشت:

$$A'(2, 17) \in f \Rightarrow 17 = 8 + 8 + a \Rightarrow a = 1$$

(کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - تابع وارون - تعریف اولیه تابع وارون‌پذیری) (متوسط)

۲۵- گزینه «۲» - با توجه به صعودی اکید بودن تابع $f(x) = x^2 - 8x$ در بازه $x \geq 4$ و تقاطع آن با خط $y = x$ داریم:

$$x^2 - 8x = x \Rightarrow x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 9$$

که فقط $x = 9$ در بازه $x \geq 4$ موجود بوده و به تنها نقطه تلاقی دو تابع یعنی $A(9, 9)$

می‌رسیم. (کتاب درسی یا تغییر) (پایه دوازدهم - تابع وارون - وارون‌پذیری و تقاطع f^{-1}) (متوسط)