۱- گزینه «۳» ـ باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ ، $x+۲$ و $x$ ، ۹ است. بنابراین $f$ به‌صورت $f(x)=ax(x+۱)(x+۲)+۹$ است. حال چون $f$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $f(-۳)=۰$:

$$f(-۳)=a(-۳)(-۳+۱)(-۳+۲)+۹=۰ \Rightarrow -۶a=-۹ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}x(x+۱)(x+۲)+۹=\frac{۳}{۲}(x^۳+۳x^۲+۲x)+۹ \Rightarrow$$

$$۳a+b+c=\frac{۳}{۲}(۳+۳+۲)=۱۲$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تقسیم و بخش‌پذیری)

۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=-۲x+|x+۱|=\begin{cases}-x+۱ & x\geq -۱\\ -۳x-۱ & x<-۱\end{cases}$$

تابع $f$ نزولی است. پس از شرط $f(x^۲+۱)>f(۵x-۳)$ نتیجه می‌شود $x^۲+۱<۵x-۳$ .

بنابراین:

$$x^۲+۱<۵x-۳ \Rightarrow x^۲-۵x+۴<۰$$

| $-\infty$ | | ۱ | | ۴ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | ۰ | − | ۰ | + | |
| | | | ج | | | |

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ توابع یکنوا)

۳- گزینه «۴» ـ نکته: در توابع $y=a\sin(bx)$ و $y=a\cos(bx)$، داریم:

$$|a|=\frac{\text{بیشترین مقدار تابع} - \text{کمترین مقدار تابع}}{۲}$$

بنابراین $|a|=\frac{۲-(-۲)}{۲}=۲$، از طرفی باتوجه به شکل نمودار $a$ باید منفی باشد، پس $a=-۲$ .

$$x=۰ \Rightarrow y=-۲\cos(c) \xrightarrow{y=-\sqrt{۲}} -۲\cos(c)=-\sqrt{۲} \Rightarrow \cos c=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow c=\frac{\pi}{۴}$$

هم‌چنین نمودار تابع دارای دو نوسان کامل است، یعنی $T=\pi$ .

$$T=\frac{۲\pi}{b} \Rightarrow \frac{۲\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=۲ \Rightarrow abc=-۲\times۲\times\frac{\pi}{۴}=-\pi$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۴- گزینه «۱» ـ

$$y=\frac{\tan^۲\theta-\sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta-\cos^۲\theta)}=\frac{\frac{\sin^۲\theta-\sin^۲\theta\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۲\theta-\sin^۲\theta\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta})}=\frac{\frac{\sin^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۲\theta(۱-\sin^۲\theta)}{\sin^۲\theta})}=$$

$$\frac{\frac{\sin^۴\theta}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۲\theta})}=\frac{\tan^۶\theta}{\tan^۵\theta}=\tan\theta$$

$\tan^۶\theta$

دوره تناوب $y=\tan\theta$ برابر است با $T=\pi$ .

روش دوم: نکته:

$$\begin{cases}\tan^۲\theta-\sin^۲\theta=\tan^۲\theta\sin^۲\theta\\ \cot^۲\theta-\cos^۲\theta=\cot^۲\theta\cos^۲\theta\end{cases} \Rightarrow y=\frac{\tan^۲\theta\sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta\cos^۲\theta)}=\frac{\tan^۲\theta\sin^۲\theta}{\tan^۳\theta\cos^۲\theta}=\tan\theta$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب و تانژانت)

۵- گزینه «۲» ـ می‌دانیم اگر $T$ دوره تناوب تابع $f$ باشد، داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$

حال به امتحان کردن گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $f(x+۲\pi)=\tan(x+۲\pi)-|\sin(x+۲\pi)|=\tan x-|\sin x|=f(x)$ ✓

گزینه «۲»: $f(x+\pi)=\tan(x+\pi)-|\underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin x}|=\tan x-|\sin x|=f(x)$ ✓

گزینه «۳»: $f(x+\frac{\pi}{۲})=\tan(x+\frac{\pi}{۲})-|\sin(x+\frac{\pi}{۲})|=-\cot x-|\cos x|\neq f(x)$ ×

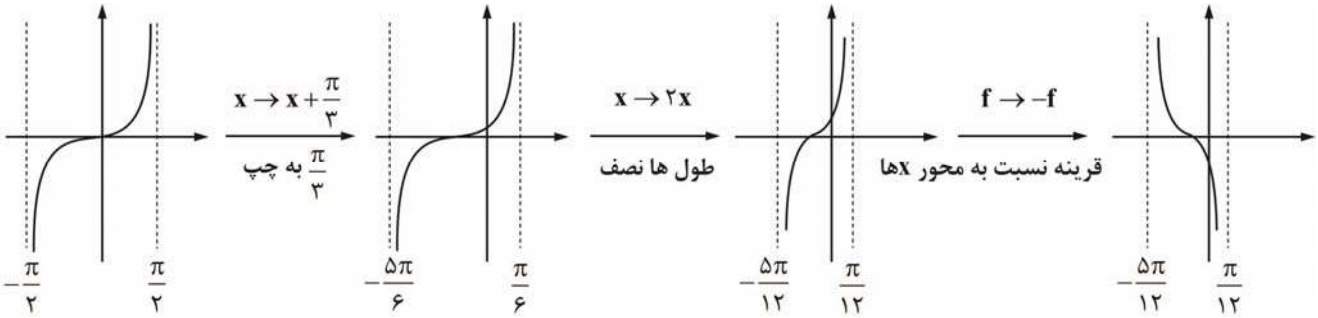
گزینه «۴»: $f(x+\frac{\pi}{۴})=\tan(x+\frac{\pi}{۴})-|\sin(x+\frac{\pi}{۴})|\neq f(x)$ ×

گزینه «۱» و «۲» هر دو در شرط $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، اما مقدار کوچک‌تر دوره تناوب است، پس $T=\pi$ .

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۶- گزینه «۳» ـ با توجه به این‌که دوره تناوب این تابع $\pi = \frac{۳\pi}{۱۴} - (\frac{-۱۱\pi}{۱۴})$ است، پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. زیرا دوره تناوب آن‌ها $۲\pi$ است. در گزینه «۱»، به‌ازای $x = \frac{-۱۱\pi}{۱۴}$ و $x = \frac{۳\pi}{۱۴}$ تابع دارای **max** و در گزینه «۳»، به‌ازای $x = \frac{-۱۱\pi}{۱۴}$ و $x = \frac{۳\pi}{۱۴}$ دارای **min** است. با توجه به این که نمودار تابع در این نقاط دارای **min** است. پس گزینه «۳» درست است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

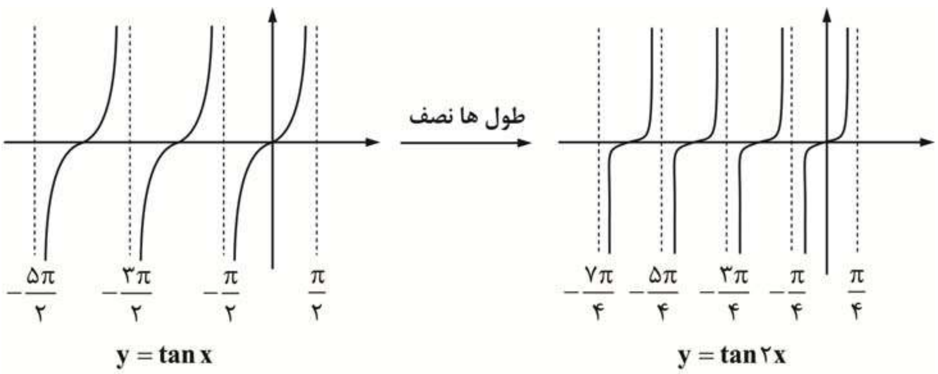
۷- گزینه «۱» ـ




(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ نمودار تانژانت)

۸- گزینه «۱» ـ بررسی موارد:

مورد «الف»:




باتوجه به این‌که تابع $f(x) = \tan ۲x$ در نقطه $x = -\frac{۳\pi}{۴}$ و $x = -\frac{۵\pi}{۴}$ از بازه $(-\frac{۴\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۲})$ تعریف نشده است، نمی‌تواند در این بازه صعودی باشد.

مورد «ب»: دامنه تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{۴})$ برابر است با:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{\pi}{۴} \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z}\}$$

مورد «پ»:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x + \frac{\pi}{۳} \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x \neq k\pi + \frac{\pi}{۶}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (۶k + ۱)\frac{\pi}{۱۲}, k \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین تنها مورد «پ» درست بود. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب و تانژانت)

۹- گزینه «۳» ـ

$$\overbrace{\frac{-۴۷\pi}{۲۴}}^{\text{ناحیه اول}} \leq \frac{۵x}{۳} - ۳\pi \leq \overbrace{\frac{-۲۹\pi}{۱۸}}^{\text{ناحیه اول}} \xrightarrow{\text{sin در ناحیه اول صعودی است}} \sin(\frac{-۴۷\pi}{۲۴}) \leq \sin(\frac{۵x}{۳} - ۳\pi) \leq \sin(\frac{-۲۹\pi}{۱۸})$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{۲۹\pi}{۱۸}) \leq -\sin(\frac{۵x}{۳} - ۳\pi) \leq \sin(\frac{۴۷\pi}{۲۴})$$

کمترین مقدار عبارت برابر است با:

$$۲ - \sin(\frac{۵x}{۳} - ۳\pi) = ۲ + \sin\frac{۲۹\pi}{۱۸} = ۲ - \sin\frac{۷\pi}{۱۸}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

**۱۰- گزینه «۱» ـ**

$$\sin\frac{۴۱\pi}{۳۴}=\sin(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۱۷}}_{\text{ناحیه سوم}})=-\cos\frac{۵\pi}{۱۷}$$

$$\cos\frac{۸۹\pi}{۳۴}=\cos(\underbrace{\frac{۵\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۱۷}}_{\text{ناحیه دوم}})=-\sin\frac{۲\pi}{۱۷}$$

$$\Rightarrow\ \cos\frac{۸۹\pi}{۳۴}+\sin\frac{۴۱\pi}{۳۴}=-\sin\frac{۲\pi}{۱۷}-\cos\frac{۵\pi}{۱۷}$$

**مورد «پ» نادرست است.**

$$\sin\frac{۴۱\pi}{۳۴}+\cos\frac{۸۹\pi}{۳۴}=\underbrace{-\cos\frac{۵\pi}{۱۷}}_{\text{منفی}}\underbrace{-\sin\frac{۲\pi}{۱۷}}_{\text{منفی}}<۰$$

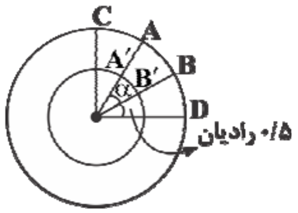
**مورد «الف» درست است.**

$$\sin\frac{۴۱\pi}{۳۴}=-\cos\frac{۵\pi}{۱۷}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۱۷}=\cos(\pi-\frac{۴\pi}{۱۷})=-\cos\frac{۴\pi}{۱۷}\ \xrightarrow[\text{cos در ناحیه اول نزولی است}]{\frac{۵\pi}{۱۷}>\frac{۴\pi}{۱۷}}\ \cos\frac{۵\pi}{۱۷}<\cos\frac{۴\pi}{۱۷}\Rightarrow-\cos\frac{۵\pi}{۱۷}>-\cos\frac{۴\pi}{۱۷}$$

**مورد «ب» نادرست است.** (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

**۱۱- گزینه «۱» ـ اگر شعاع دایره بزرگ را r بنامیم، داریم:**




$$\widehat{AB}=r\alpha$$

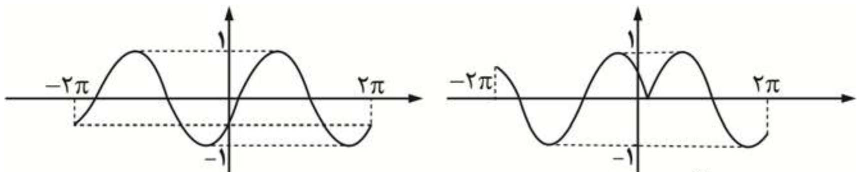
$$\widehat{A'B'}=۲\alpha$$

$$\Rightarrow\ \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{r}{۲}\Rightarrow\frac{\frac{۵\pi}{۶}-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵\pi}{۹}-۱}=\frac{r}{۲}\Rightarrow r=۳$$

$$\widehat{BD}=۰/۵\times۳=\frac{۳}{۲}\ \text{و}\ \widehat{CD}=\frac{\pi}{۲}\times۳=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\widehat{AC}=\frac{۳\pi}{۲}-(\frac{۳}{۲}+\frac{۵\pi}{۶}-\frac{۳}{۲})=\frac{۴\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

**۱۲- گزینه «۴» ـ**




$y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ $\qquad$ $y=\sin|x-\frac{\pi}{۴}|$

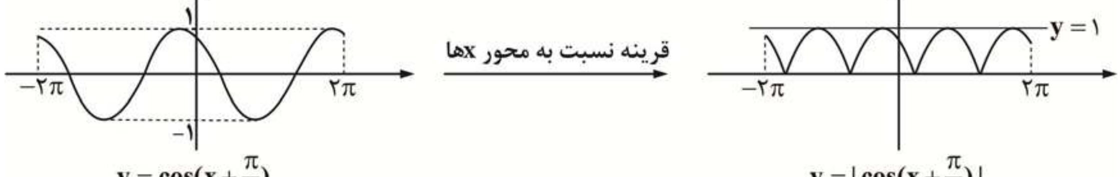
**توجه کنید که:**

$$y=\sin|x-\frac{\pi}{۴}|=\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{۴}) & x\geq\frac{\pi}{۴}\\ \sin(-(x-\frac{\pi}{۴}))=-\sin(x-\frac{\pi}{۴}) & x<\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

**بنابراین به‌ازای $x<\frac{\pi}{۴}$ کافی است قرینه نمودار $\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.**

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ رسم توابع مثلثاتی)

**۱۳- گزینه «۲» ـ با توجه به‌اینکه $\cos(-x)=\cos x$، بنابراین $\cos|x+\frac{\pi}{۸}|=\cos(x+\frac{\pi}{۸})$.**




$y=\cos(x+\frac{\pi}{۸})$ $\qquad$ $y=|\cos(x+\frac{\pi}{۸})|$

**بنابراین دو تابع در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.** (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ نمودار توابع مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه‌ها:

در نقطه $x=0$ داریم $y=2$. بنابراین گزینه «۴» حذف می‌شود. هم‌چنین با توجه به نمودار ماکزیمم تابع ۵ است، پس گزینه «۱» هم حذف می‌شود.

از طرف دیگر با توجه به این‌که نمودار $\sin x$ در $[0,\frac{\pi}{2}]$ صعودی و در $[\frac{\pi}{2},\pi]$ نزولی و تابع $-\sin x$ در $[0,\frac{\pi}{2}]$ نزولی و در $[\frac{\pi}{2},\pi]$ صعودی است، نتیجه می‌شود ضابطه نمودار داده شده، $y=-3\sin x+2$ است. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ نمودار توابع مثلثاتی)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow[\text{cos در ناحیه اول نزولی است}]{\cos(-x)=\cos x} \cos(1)\le\cos(\sin x)\le\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

از آن‌جا که ۱ رادیان برابر است با $57/3°$ داریم:

$$\cos(1)=\cos(57/3°)>\cos 60°=0/5$$

بنابراین مقدار $\cos(1)$ اندکی بیش‌تر از $0/5$ است.

$$0/5<\cos(\sin x)\le 1$$

در نتیجه گزینه «۱» درست است. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ نمودار توابع مثلثاتی)

۱۶- گزینه «۲» ـ فرض می‌کنیم $AC=x$.

$$CH=x\sin 15° \Rightarrow CH=0/25x=\frac{1}{4}x$$

$$\tan 30°=\frac{CH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\frac{1}{4}x}{BH} \Rightarrow BH=\frac{\frac{1}{4}x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}x$$

$$AH=x\cos 15° \xrightarrow{\cos 15°=\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}} AH=\frac{\sqrt{15}}{4}x$$

$$AB=AH+BH \Rightarrow (\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4})x=\frac{3}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \Rightarrow x=3$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۱۷- گزینه «۳» ـ

$$\frac{2\cos\alpha-\sin\alpha}{\tan\alpha-1}=\cos\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha \Rightarrow 3\cos\alpha=2\sin\alpha \xrightarrow{\div 2\cos\alpha} \tan\alpha=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\alpha$ در ناحیه اول یا سوم است.

$$A=\frac{2\cos\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\tan\alpha)\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2-\cos\alpha)}{(1-\tan\alpha)\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha(2-\cos\alpha)}{1-\tan\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha\le 1 \Rightarrow -\cos\alpha\ge -1 \Rightarrow 2-\cos\alpha\ge 1 \Rightarrow \text{مثبت است } 2-\cos\alpha \\ \tan\alpha=\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\tan\alpha=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{منفی است } 1-\tan\alpha \\ \cot\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow \text{مثبت است } \cot\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow A<0$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ دایره مثلثاتی)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$A=\sin\alpha\cos\alpha(1+\tan\alpha)(1+\cot\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha}\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \Rightarrow$$ همواره نامنفی است. A

$$B=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha\tan^2\alpha \Rightarrow$$

B همواره نامنفی است.

$$C=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \Rightarrow$$ همواره نامنفی است C

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ اتحادهای مثلثاتی)

۱۹- گزینه «۱» ـ نکته:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

اثبات:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x$$
$$\Rightarrow 1=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x) \Rightarrow 1=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$\Rightarrow \sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

حال داریم:

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin x\cos x}=\frac{1-3\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}-3\sin x\cos x \Rightarrow a=1, b=-3$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ اتحادهای مثلثاتی)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$S_{\text{دایره}}=\pi r^2 \xrightarrow[\pi=3]{r=1} S_{\text{دایره}}=3 \xrightarrow{\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{12}} S_{OAB}=\frac{1}{12}\times S_{\text{دایره}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{1}{2}OB\times OC\times\sin 30^\circ \Rightarrow S_{OBC}=\frac{1}{4}OC$$

$$S_{\text{ناحیه رنگی}}=S_{\overset{\Delta}{OBC}}-S_{OAB} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{1}{4}OC-\frac{1}{4} \Rightarrow OC=4$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ نسبت‌های مثلثاتی)