هندسه ۳

۱- گزینه «۱» ـ دو طرف برابری داده شده را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}(A^{۳}-۲A^{۲}-A-I)=A^{-۱}\times\bar{O}$$
$$A^{۲}-۲A-I-A^{-۱}=\bar{O}$$

به‌دست می‌آید.

$$A^{-۱}=A^{۲}-۲A-I$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۲- گزینه «۳» ـ به‌دست می‌آید:

$$|A|=۱۰-۹=۱\,،\,|B|=۲-۳=-۱$$

می‌نویسیم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\,،\,B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$
$$۲A^{-۱}+۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}۱۰ & -۶\\ -۶ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳ & ۹\\ ۳ & -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ -۳ & -۲\end{bmatrix}$$

اکنون عبارت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{|۲A^{-۱}+۳B^{-۱}|}=\frac{۱}{-۱۴+۹}=-\frac{۱}{۵}$$
$$(۲A^{-۱}+۳B^{-۱})^{-۱}=-\frac{۱}{۵}\times\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۳ & ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵}\\ -\frac{۳}{۵} & -\frac{۷}{۵}\end{bmatrix}$$

در نهایت:

$$(۲A^{-۱}+۳B^{-۱})^{-۱}\text{ مجموع درایه‌های ماتریس }=\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۵}-\frac{۷}{۵}=-۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۳- گزینه «۲» ـ برای حل به روش ماتریس وارون می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۳\end{bmatrix}$$

یعنی:

$$x=-۴\,,\,y=۳$$

در نتیجه:

$$x+y=-۴+۳=-۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

۴- گزینه «۴» ـ چون هر دو دستگاه دارای جواب مشترک هستند پس از هر دو دستگاه معادله‌ای که دارای پارامتر a و b نیستند را انتخاب می‌کنیم و با حل دستگاه شامل این دو معادله x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}x-۲y=۳\\ ۳x+y=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=۱\,،\,y=-۱$$

جواب‌های به‌دست آمده در معادلات شامل پارامترها صدق می‌کنند.

$$ax+۳y=۴\xrightarrow{x=۱\,،\,y=-۱}a-۳=۴\Rightarrow a=۷$$
$$bx-ay=۲\xrightarrow[a=۷]{x=۱\,،\,y=-۱}b+۷=۲\Rightarrow b=-۵$$

در نهایت می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b}=-\frac{۷}{۵}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

۵- گزینه «۲» ـ می‌توانیم ضریب یک ماتریس را از داخل دترمینان بیرون بیاوریم، امّا باید آن عدد به توان مرتبه ماتریس برسد:

$$|-\frac{۱}{۲}A^{۳}|=(-\frac{۱}{۲})^{۳}\,|A|^{۳}=-\frac{۱}{۸}\times۲^{۳}=-۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

۶- گزینه «۴» ـ می‌نویسیم:

$$(۲I - A)^۲ = ۴I - ۴A + A^۲$$
$$= ۴(I - A) + A^۲$$

طبق فرض $I - A = ۲A^۲$ پس:

$$(۲I - A)^۲ = ۴(۲A^۲) + A^۲ = ۹A^۲$$

اکنون می‌نویسیم:

$$|(۲I - A)^۲| = |۹A^۲| = ۹^۲ |A|^۲ = ۹^۲$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$|۲I - A| = \pm ۹$$

فقط عدد ۹ در بین گزینه‌ها وجود دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

۷- گزینه «۱» ـ با توجه به تعریف به‌دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۷ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

اکنون با محاسبه دترمینان می‌نویسیم:

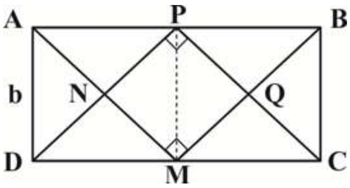
$$|A| = ۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

هندسه ۱ و ۲

۸- گزینه «۲» ـ از برخورد نیم‌سازهای داخلی مستطیل به طول و عرض a و b مربعی به ضلع‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)$ به‌دست می‌آید. اگر دو رأس این مربع روی ضلع‌های مستطیل باشد، باید طول قطر مربع MNPQ برابر عرض مستطیل باشد:

$$\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)) = b \Rightarrow a - b = b \Rightarrow a = ۲b$$



(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ برخورد نیم‌سازهای ۴ ضلعی)

۹- گزینه «۴» ـ می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ = ۵$$

از طرف دیگر دو مثلث AEF و ABC به نسبت $\frac{۱}{۲}$ متشابه هستند و نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر نسبت تشابه است:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AO}{۵} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AO = \frac{۵}{۲}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$OM = AM - AO = ۵ - \frac{۵}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ میانه وارد بر وتر)

۱۰- گزینه «۲» ـ می‌دانیم در هر مثلث فاصله مرکز ثقل تا وسط هر ضلع $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر این ضلع و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

شکل را ببینید. در مثلث ADC، نقطه O مرکز ثقل است، پس:

$$OF = \frac{۱}{۳}OD = \frac{۱}{۳} \times ۳۰ = ۱۰$$

بنابراین:

$$EF = ۲OF = ۲۰$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ نسبت میانه‌ها)

۱۱- گزینه «۲» ـ چون مثلث‌های OAB و BCO' متساوی‌الاضلاع هستند، پس طول تمام ضلع‌های این مثلث‌ها برابر طول ضلع مربع هستند:

$$OB = O'B$$

از طرف دیگر:

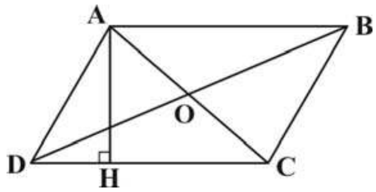
$$O\hat{B}O' = ۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}O' = ۴۵^\circ$$

مثلث BOC متساوی‌الساقین با زاویه رأس ۳۰° است، پس:

$$B\hat{O}C = ۷۵^\circ \Rightarrow \alpha + ۴۵^\circ = ۷۵^\circ$$

در نتیجه $\alpha = ۳۰^\circ$. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ ویژگی مربع)

۱۲- گزینه «۴» ـ وقتی قطرهای متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع به ۴ مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌شود. پس از آن‌جا که $S_۱ = S_۲ = \frac{۱}{۴}S$، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر ۲۴ است:



$$S = AH \times CD \Rightarrow ۲۴ = AH \times ۸ \Rightarrow AH = ۳$$

در مثلث ADH، بنابر نسبت‌های مثلثاتی، $\sin\hat{D} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{AD}$ پس $AD = ۲\sqrt{۳}$.

در نهایت می‌نویسیم:

$$\text{محیط } ABCD = ۲(۲\sqrt{۳} + ۸) = ۴(\sqrt{۳} + ۴)$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ مساحت متوازی‌الاضلاع و ویژگی آن)

۱۳- گزینه «۲» ـ برای محاسبه مساحت از قضیه پیک، می‌دانیم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱$$

اگر به نقطه‌های درونی ۱ واحد اضافه شود به‌دست می‌آید:

$$S' = \frac{b}{۲} + i + ۱ - ۱ = \frac{b}{۲} + i$$

بنابراین:

$$S' - S = (\frac{b}{۲} + i) - (\frac{b}{۲} + i - ۱) = ۱$$

یعنی مقدار مساحت ۱ واحد افزایش می‌یابد. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ قضیه پیک)